Operaciones entre Matrices (Multiplicación)

También relacionado con sistemas de ecuaciones se puede ver que el producto de matrices tiene una gran ventaja para denotar matricialmente un sistema.
Considérese el sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

que se puede escribir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Teorema 1. *Sean A,B,C tres matrices de ordenes* $A \in M_{m\times p}$, $B \in M_{p\times r}$, $C \in M_{r\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

tales que las operaciones indicadas tienen sentido. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ *un escalar. Entonces*

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

d) $I_{m\times m}A = A = AI_{n\times n}$

Demostración. Se tiene que

1. En este caso tanto la matriz $A(BC)$ como la matriz $(AB)C$ tienen orden $m \times n$. Entonces sólo se debe verificar que sus elementos correspondientes coinciden. Llámese θ_{ij} y ρ_{ij} al elemento de la i-ésimo renglón y la j-ésima columna de las matrices $A(BC)$ y $(AB)C$ respectivamente. Mostraremos que $\theta_{ij} = \rho_{ij}$. Para ello vamos a realizar la operacion (BC)

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{kr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & \cdots & c_{3j} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rj} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{r} b_{1k}c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{1k}c_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{1k}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r} b_{kk}c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{kk}c_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{kk}c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r} b_{pk}c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{pk}c_{kj} & \cdots & \sum_{k=1}^{r} b_{pk}c_{kn} \end{pmatrix}$$

Al considerar el k-ésimo renglon de la matriz B multiplicado por la j-ésima columna de C

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{kr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p1} & b_{p3} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & \cdots & c_{3j} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rj} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix} = b_{k1}c_{1j}+b_{k2}c_{2j}+\cdots+b_{kr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj}$$

Lo anterior lo podemos expresar

$$\sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \beta_{kj}$$

tenemos entonces que β_{kj} es un elemento de la matriz (BC) que vamos a multiplicar por el i-ésimo renglon de la matriz A

$$a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{ip}\beta_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\beta_{kj} = \theta_{ij}$$

Entonces

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{r} a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

Por otra parte un elemento (AB)C se puede obtener multiplicando el i-ésimo renglon de A por la s-ésima columna de B

$$a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + \cdots + a_{ip}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks} = \alpha_{is}$$

esto lo vamos a multiplicar por la j-ésima columna de la matriz C

$$\alpha_{i1}c_{1j} + \alpha_{i2}c_{2j} + \cdots + \alpha_{ir}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \rho_{ij}$$

se tiene entonces

$$\rho_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \theta_{ij}$$

2. Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in M_{n\times k}$ y $C = (c_{ij}) \in M_{n\times k}$. El orden de la matriz que resulta de la operación $A(B + C)$ y $AB + BC$ es $m \times k$. Vamos a comparar sus elementos.
La entrada del i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz $A(B + C)$ es

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}[b_{\ell j} + c_{\ell j}]$$

y la respectiva de $AB + AC$ es

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}c_{\ell j}$$

Entonces

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}[b_{\ell j}+c_{\ell j}] = \sum_{\ell=1}^{n}[a_{i\ell}b_{\ell j}+a_{i\ell}c_{\ell j}] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}c_{\ell j}$$

Por lo tanto $A(B+C) = AB + AC$

3. El resultado se obtiene de las siguientes igualdades

$$\alpha \sum_{\ell}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j} = \sum_{\ell}^{n} \alpha[a_{i\ell}b_{\ell j}] = \sum_{\ell}^{n}(\alpha a_{i\ell})b_{\ell j} = \sum_{\ell}^{n} a_{i\ell}(\alpha b_{\ell j})$$

4. Para cada $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$ la entrada ij de $I_{m\times m}A$ es

$$\sum_{\ell}^{n} e_{i\ell}a_{\ell j} = e_{ii}a_{ij}$$

y la entrada ij de la matriz $AI_{n\times n}$ es

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}e_{\ell j} = a_{ij}e_{jj} = a_{ij}$$

Por lo tanto $I_{m\times m}A = A$ y $AI_{n\times n} = A$

$\square$

Definición 1. *Si en una matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ se tiene que $m = n$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n*

Definición 2. *Dada la matriz cuadrada A de orden n, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ se dice que los elementos $(a_{ii})_{i=1,\ldots,n}$ constituyen la diagonal principal de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A la matriz de orden n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en la cual todos sus elementos son cero, excepto los de la diagonal principal, que son uno, se le llama matriz identidad (de orden n), y se denota por I_n,. Así, por ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta Sea $A \in M_{m\times n}$, se llama matriz traspuesta de A, denotada A^t, a la matriz

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}}$$

es decir si $A \in M_{m\times n}$ entonces $A^t \in M_{n\times m}$

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices traspuestas tienen especial importancia para matrices cuadradas.
Algunas de sus propiedades son

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

Demostración. a) Si $A \in M_{m\times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A^t)^t &= \left(\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}\right)^t\right)^t \\
&= \left((a_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}}\right)^t \\
&= (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\
&= A
\end{aligned}$$

b) Si $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{m\times n}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(A+B)^t &= \left((a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}\right)^t \\
&= (a_{ji}+b_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} \\
&= (a_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} + (b_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n}} \\
&= A^t + B^t
\end{aligned}$$

c) Si $A \in M_{m\times n}$ y $B \in M_{n\times p}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(AB)^t &= \left(\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} \right)^t \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \right)_{\substack{j=1,\dots,p \\ i=1,\dots,m}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} \right)_{\substack{j=1,\dots,p \\ i=1,\dots,m}} \\
&= B^t A^t
\end{aligned}$$

$\square$