Operaciones elementales

Operaciones elementales de una matriz Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$ se pueden realizar las siguientes operaciones elementales

a) Intercambiar dos renglones (columnas)

b) Multiplicar un renglon (columna) por un número real distinto de cero

c) Sumar a un renglon (columna) un multiplo real de otro renglon (columna)

Se dirá que la matriz B es equivalente a la matriz A, lo cual suele escribirse $B \sim A$ si se puede obtener B a partir de A, realizando en ésta una secuencia (finita) de operaciones elementales en sus líneas.

Ejemplo Sea $A,\ B \in M_{3\times 3}$ dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que $B \sim A$ ya que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{R_2+(-2)R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Dado el sistema

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Se asocia a éste la matriz A (de orden $m \times n$) de sus coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

llamada matriz de coeficientes (o matriz del sistema), así como la matriz $m \times (n+1)$.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

La misma matriz A con una última columna añadida, la de los términos independientes, llamada matriz aumentada de coeficientes (o del sistema).

Ejemplo Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Se hace que el primer elemento distinto de cero de la primera línea sea 1. Esto es posible multiplicando por $\frac{1}{3}$ tal línea. Sin embargo, se puede intercambiar primeramente la primera y segunda líneas (pues esta línea comienza ya con 1). Se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

La siguiente etapa es, por medio de sustituir líneas por ellas mismas más múltiplos de otras, hacer ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1 logrado esto es:

$$L_2 \to L_2 - 3L_1, \quad L_3 \to L_3 - 2L_1, \quad L_4 \to L_4 - 4L_1$$

Se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se realiza ahora lo siguiente

$$L_3 \to L_3 - 3L_2$$

obteniendose

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se realiza ahora

$$L_3 \to -\frac{1}{11} L_3$$

para lograr un 1 como primer elemento no nulo de la tercera línea

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se hace ahora

$$L_4 \to L_4 - 5L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{54}{11} & \frac{54}{11} \end{array}\right)$$

Para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la cuarta línea se realiza

$$L_4 \to \frac{11}{54} L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Obsérvese que esta matriz se encuentra ya en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida, se comienza con el último uno logrado (en el paso anterior) y se procede a volver ceros las posiciones restantes (éncima de él).

Para esto se realiza

$$L_1 \to -L_1 + 3L_4, \quad L_2 \to L_2 - 10L_4, \quad L_3 \to L_3 - \frac{20}{11} L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora con el siguiente uno se hace lo mismo: se realiza

$$L_1 \to L_1 + L_3, \quad L_2 \to L_2 - 5L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente se hace

$$L_1 \to L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y el sistema que representa esta matriz es entonces $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1$ que es la solución del sistema.

Matrices Escalón Reducida

Definición 1. *Se dice que la matriz A de orden $m \times n$ se llama escalonada por renglones si se cumplen las siguientes condiciones:*

a) Si a_{ik} es el primer elemento distinto de cero del renglón i y si para $r > i$, a_{rj} es el primer elemento distinto de cero del renglón r, entonces $k < j$.

b) Si a_{ik} es el primer elemento distinto de cero del renglón i, entonces $a_{jk} = 0$ para todo $j = 1, ..., m$ con $j \neq i$.
*La matriz A se llama **escalonada reducida** por renglones si es escalonada y*

c) El primer elemento distinto de cero de cada renglón es 1.

d) Si un renglón A consta únicamente de ceros, entonces cualquier renglón por debajo de él también tiene todos sus elementos cero.

Ejemplo Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

se encuentran en la forma escalonada.

La propiedad más importante que posee una matriz en la forma escalonada reducida es que si ésta representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las soluciones de éste pueden leerse muy fácilmente.

Ejemplo Suponga que la matriz

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

representa la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, de modo que atendiendo a la correspondencia entre matrices y sistemas de ecuaciones establecida anteriormente, se ve que el sistema correspondiente es:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 4 \end{aligned}$$

o sea, $x_1 = 4,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 4$. Las soluciones están dadas, pues, en la misma matriz.