Operaciones entre conjuntos

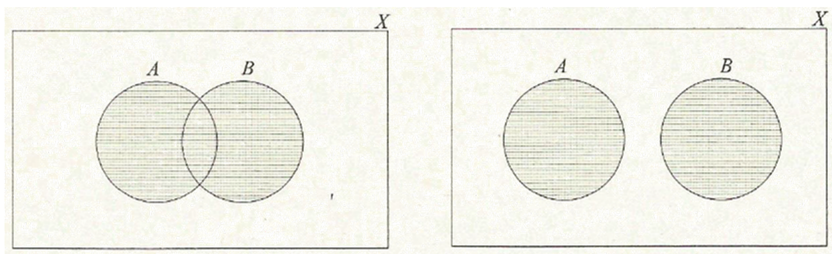
La operación binaria entre conjuntos asociada al conectivo lógico $\vee$ se denomina la **unión**

Definición 1. *Sean A,B subconjuntos de un conjunto universal U.* ***La unión*** *de A y B es el conjunto*

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

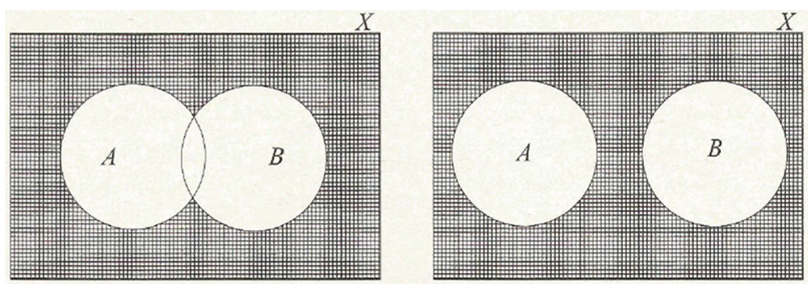
Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A \cup B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \vee \ x \in B)$$



La negación sería

$$x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow \ (x \notin A \ \wedge \ x \notin B)$$



Teorema 1. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$

b) $A = A \cup \emptyset$; $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (C \cup C)$

d) $A \cup B = B$ *si y sólo si* $A \subseteq B$

Demostración. a) Sea $x \in A$. Luego es verdadera: $x \in A$ *o* $x \in B$ y por lo tanto $x \in A \cup B$ y así $A \subseteq A \cup B$

b) ($\subseteq$) Si $x \in A \cup \emptyset$, por definición se tiene que $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Pero $x \in \emptyset$ es falsa, sin importar quien es x, así que debe ser $x \in A$.
($\supseteq$) Por inciso (a), tenemos $A \subseteq A \cup \emptyset$

c) ($\subseteq$) Si $x \in (a \cup B) \cup C$, entonces $x \in A \cup B$ o $x \in C$. Si $x \in C$, por el inciso (a), entonces $x \in B \cup C$ y nuevamente por el inciso (a), $x \in A \cup (B \cup C)$. Ahora, si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ *o* $x \in B$. En el caso de que $x \in A$, obtenemos $x \in A \cup (B \cup C)$ y en caso de que $x \in B$ obtenemos que $x \in B \cup C$ y de aquí $x \in A \cup (B \cup C)$, aplicando inciso (a). Concluimos que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.
($\supseteq$) De manera similar se prueba que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

d) ($\Rightarrow$) Supongamos que $A \cup B = B$. Por el inciso (a), $A \subseteq A \cup B = B$
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$. Por el inciso (a) $B \subseteq A \cup B$ así que sólo debemos probar que $A \cup B \subseteq B$. Para esto, sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como por hípótesis $A \subseteq B$, se debe tener $x \in B$. Así que $x \in A$ o $x \in B$ implica, en cualquiera de los dos casos que, $x \in B$, luego $A \cup B \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$

$\square$

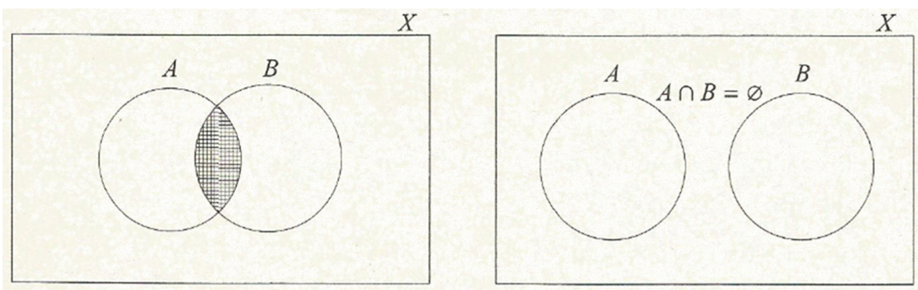
La operación binaria entre conjuntos asociada al conectivo lógico $\wedge$ se denomina la **intersección**

Definición 2. *Sean A,B subconjuntos de un conjunto universal U.* ***La intersección*** *de A y B es el conjunto*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A \cap B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \in B)$$



La negación sería

$$x \notin A \cap B \ \Leftrightarrow \ (x \notin A \ \vee \ x \notin B)$$

Teorema 2. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cap B = A$ *si y sólo si* $A \subseteq B$

Demostración. a) Si fuera $A \cap \emptyset \neq \emptyset$, entonces, por definición, existiría un elemento $x \in A \cap \emptyset$, lo que significaría que $x \in \emptyset$, que es absurdo ya que $\emptyset$ no tiene elementos, por tanto no puede se $A \cap \emptyset \neq \emptyset$ y así $A \cap \emptyset = \emptyset$

b) ($\subseteq$) Si $x \in (A \cap B) \cap C$ entonces $x \in A \cap B$ y $x \in C$, lo que implica, por definición, que ($x \in A$ *y* $x \in B$) y $x \in C$ y como $x \in B$ y $x \in C$, se tiene que $x \in B \cap C$ y ya que también $x \in A$, entonces $x \in A \cap (B \cap C)$.
($\supseteq$) Análoga a la demostración anterior

c) ($\Rightarrow$) Supongamos $A \cap B = A$. Entonces $A = A \cap B \subseteq B$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$.($\subseteq$) $A \cup B \subseteq A$
($\supseteq$) $A \subseteq A \cap B$ puesto que si $x \in A$, entonces $x \in B$ por hipótesis. Luego $x \in A \cap B$

$\square$

Teorema 3. *Sean A, B y C conjuntos*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.*
2. *Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.*

Demostración. a) Sea $x \in A \cup C$. Entonces $x \in A$ o $x \in C$. Como $x \in A$ implica $x \in B$, se tiene que $x \in B$ o $x \in C$ y por lo tanto $x \in B \cup C$. Luego $A \cup C \subseteq B \cup C$

b) Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. En cualquiera de los dos casos, por hipótesis, se tiene que $x \in C$ con lo que $A \cup B \subseteq C$

$\square$

Teorema 4. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Demostración. ($\subseteq$) Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Luego $x \in A$ y $x \in B \cup C$. Esto es $x \in A$ y ($x \in B$ o $x \in C$).

a) Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$ por tanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) Si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C$ por tanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Como en ambos casos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
($\supseteq$) Ahora, sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Luego $x \in A \cup B$ o $x \in A \cup C$. Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$ y por ser $B \subseteq B \cup C$, se tiene que $x \in B \cup C$ y de aqui $x \in A \cap (B \cup C)$. El caso $x \in A \cap C$ es análogo. por tanto

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

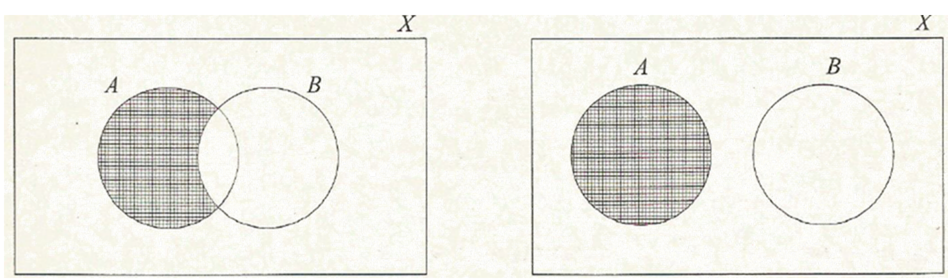
$\square$

Definición 3. *Sean A,B conjuntos.* ***La diferencia*** *de A y B es el conjunto*

$$A - B = \{x \mid x \in A \ y \ x \notin B\}$$

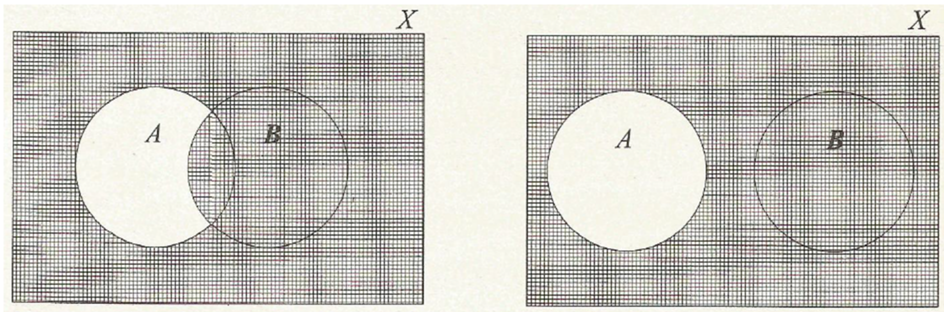
Según la definición, se tiene entonces que

$$x \in A - B \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \notin B)$$



La negación sería

$$x \notin A - B \;\Leftrightarrow\; (x \notin A \;\vee\; x \in B)$$



Proposición 1. *Sean A y B conjuntos. Entonces*

a) $(A - B) \cap B = \emptyset$.

b) $A - B = A$ *si y sólo si* $A \cup B = \emptyset$

Demostración. a) Si $x \in (A-B)\cap B$, entonces $x \in A - B$ y $x \in B$. Pero eso significa que $x \notin B$ y $x \in B$, lo cual es imposible. Por lo tanto $(A - B) \cap B = \emptyset$

b) ($\Rightarrow$) Supongamos $A - B = A$. Entonces $A \cap B = (A - B) \cap B = \emptyset$, por el inciso anterior.
($\Leftarrow$) Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Tenemos que $A - B \subseteq A$, Así que basta demostrar que $A \subseteq A - B$ para tener la igualdad. Si $x \in A$, entonces, por ser $A \cap B = \emptyset$, se debe tener que $x \notin B$ y por consiguiente $x \in A - B$. Luego $(A - B) = A$

□

Teorema 5. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Demostración. a) ($\subseteq$) $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$.
Sea $x \in A - (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B \cup C$. Pero $x \notin B \cup C$ implica $x \notin B$ y $x \notin C$. Por lo tanto $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$, por lo que $x \in A - C$ y $x \in A - C$ y así $x \in (A - B) \cap (A - C)$.
($\supseteq$) Sea $x \in (A-B)\cap(A-C)$. Entonces $x \in A - B$ y $x \in A - C$ lo que significa que $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in A$ y $x \notin C$, que es $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \notin C$. Como $x \notin B$ y $x \notin C$ implica que $x \notin B \cup C$, entonces $x \in A$ y $x \notin B \cup C$. Por lo tanto $x \in A - (B \cup C)$

□

El siguiente resultado afirma que la complementación de una unión es la intersección de los complementos, y la complementación de una intersección es la unión de los complementos. Estas afirmaciones son conocidas como **las Leyes de De Morgan**

Proposición 2. *Leyes de De Morgan. Para cualesquiera subconjuntos A y B del conjunto universal U, se tiene que*

I) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

II) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración. I) Sean A y B tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$. Queremos mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, es decir que

$$\forall\, x(x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c)$$

Tenemos que para cualquier x

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c, &\ \textit{si y sólo si } x \in U \wedge x \notin A \cup B, \\ &\ \textit{si y sólo si } x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \end{aligned}$$

Sabemos que las proposiciones $\neg(P \vee Q)$ y $\neg P \wedge \neg Q$ son lógicamente equivalentes, por lo que

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c, &\ \textit{si y sólo si } x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\ \textit{si y sólo si } x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\ \textit{si y sólo si } x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\ \textit{si y sólo si } x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

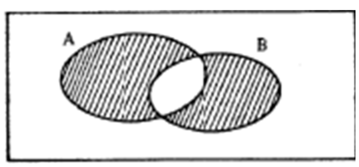
Por lo tanto $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

II) La demostración es similar a la anterior y se deja como ejercicio

□

Definición 4. *Sean A y B dos subconjuntos de U. La* ***diferencia simétrica*** *de A y B, denotada $A \triangle B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A y no en B o estan en B y no estan en A, es decir*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



de la definición de diferencia de conjuntos se tiene que

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Lema 1. *Para cualesquiera conjuntos A y B se tiene que*

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap U \cap U \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

□

Teorema 6. *La diferencia simétrica tiene las siguientes propiedades.*

a) Conmutatividad. Para cualesquiera conjuntos A y B,

$$A \triangle B = B \triangle A$$

b) Asociatividad. Para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

c) El neutro para la diferencia sim ´etrica es el vac ´io. Para cualquier con- junto A,

$$A \triangle \emptyset = A$$

d) El inverso de un conjunto con respecto a la diferencia sim ´etrica es ´el mismo. Para cualquier conjunto A,

$$A \triangle A = \emptyset$$

Demostración. Tenemos que
$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \triangle A$

b) Sean A, B y C conjuntos cualesquiera.
Para conjuntos X, Y se cumple

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c$$

por lo que

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \triangle C &= [(A \triangle B) - C] \cup [C - (A \triangle B)] \\ &= [(A \triangle B) \cap C^c] \cup [C \cap (A \triangle B)^c] \\ &= [[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C^c] \cup [C \cap [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c] \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup [[(A \cup B)^c \cup (A \cap B)] \cap C] \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
A\triangle(B\triangle C) &= (B\triangle C)\triangle A \\
&= [(B\triangle C) - A] \cup [A - (B\triangle C)] \\
&= [(B\triangle C) \cap A^c] \cup [C \cap (B\triangle C)^c] \\
&= [[(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)] \cap A^c] \cup [C \cap [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]^c] \\
&= (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C \cap A^c) \cup [[(B \cup C)^c \cup (B \cap C)] \cap A] \\
&= (B \cap C^c \cap A^c) \cup (A^c \cap C \cap B^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

c) Sea A cualquier conjunto, entonces

$$A\triangle\emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$$

d) Sea A cualquier conjunto, entonces

$$A\triangle A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

□