Una matriz escalonada es una matriz donde las entradas distintas de 0 en cada renglón empiezan después de las entradas distintas de 0 del renglón anterior.

Ejemplo Tenemos las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 1. *Toda matriz se puede convertir en una matriz escalonada usando operaciones elementales.*

Demostración. Si un renglón tiene primera entrada distinta de 0 podemos ponerlo hasta arriba y podemos restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones, para que todos ellos tengan primera entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto del primero con segunda entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el segundo lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan segunda entrada igual a 0. Si hay un renglón distinto de los primeros dos con tercera entrada distinta de 0 podemos ponerlo en el tercer lugar y restar múltiplos de ese renglón a los siguientes renglones para que todos ellos tengan tercera entrada igual a 0, etc. $\square$

Lema 2. *El rango de una matriz escalonada es el numero de renglones distintos de 0.*

Demostración. Basta observar que los renglones distintos de 0 de una matriz escalonada son vectores linealmente independientes.
Veamos que si $V_1, V_2, ..., V_m$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que para cada V_i las entradas distintas de 0 de V_i empiezan después que las entradas distintas de 0 para los V_i anteriores entonces si $V_1, V_2, ..., V_m$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$a_1V_1 + a_2V_2 + ... + a_mV_m = 0$$

Hay una coordenada que es distinta de 0 para V_1 y es igual a 0 para todos los otros $V_i's$. Como en esa coordenada en la combinación lineal, que debe ser 0, solo aparece a_1, entonces $a_1 = 0$.
Hay una coordenada que es distinta de 0 para V_2 y es igual a 0 para los $V_i's$ con $i > 2$. Como en esa coordenada en la combinación lineal, que debe ser 0, solo aparecen a_1 y a_2 , y $a = 0$, entonces $a_2 = 0$. $\square$

Espacio Renglón y Espacio Columna de una matriz

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

los renglones

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ R_2 &= (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ \vdots &= \vdots \\ R_m &= (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{aligned}$$

se pueden pensar como vectores en $\mathbb{R}^n$.
Las columnas

$$\begin{aligned} C_1 &= (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) \\ C_2 &= (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) \\ \vdots &= \vdots \\ C_n &= (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) \end{aligned}$$

se pueden pensar como vectores en $\mathbb{R}^n$.
Por lo que una matriz A por sí misma puede generar dos espacios vectoriales: el primero se forma por combinaciones lineales de los renglones, y el segundo al considerar las combinaciones lineales de las columnas. Dichos espacios se conocen como: Espacio renglón

$$\mathcal{L}(R_1, R_2, ..., R_n) = \{c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_mR_m\} = \left\{\sum_{i=1}^{m} c_iR_i\right\}$$

Espacio columna

$$\mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n) = \{c_1C_1 + c_2C_2 + \cdots + c_nC_n\} = \left\{\sum_{j=1}^{n} c_jR_j\right\}$$

Ambos espacios vectoriales no son iguales. Sin embargo, su dimensión sí lo es.
Para obtener la dimensión del espacio renglón basta con escalonar la matriz hasta obtener el número de renglones linealmente independientes. Dicho número también es conocido como **rango de la matriz A**, denotado como $R(A) = \dim L_R(A)) = \dim L_C(A)$.

Ejemplo Los espacios renglón y columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se obtendrán al escalonarla tanto en forma original como transpuesta.

Espacio renglón En este caso

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El escalonamiento arrojó dos renglones independientes. Al combinarlos linealmente con escalares genéricos se obtendrá el espacio renglón de A.

$$\mathcal{L}_R(A) = a(1,0,0,1) + b(0,1,-1,0) = (a,b,-b,a). \quad \therefore \ \{(a,b,-b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

Espacio Columna En este caso, se necesita transponer la matriz A para trabajar con sus columnas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 01 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, con una combinación lineal

$$\mathcal{L}_C(R) = a\left(1, 0, \frac{-3}{7}\right) + b\left(0, 1, \frac{1}{7}\right) = \left(a, b, -\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b\right)$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_C(R) = \left\{\left(a, b, -\frac{3}{7}a + \frac{1}{7}b\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

Los espacios son diferentes entre sí, pero ambos tienen dimensión 2.

$$\begin{aligned} \dim L_C(A) &= 2 \\ \dim L_R(A) &= 2 \\ R(A) &= 2 \end{aligned}$$

Rango de una matriz

Los renglones de una matriz M de $m \times n$ son vectores en $\mathbb{R}^n$. El **rango** de la matriz M es la dimensión del subespacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ generado por los m renglones de M, que es igual al máximo numero de renglones linealmente independientes de la matriz. Así que el **rango** r de una matriz de $m \times n$ cumple $r \leq m$, $r \leq n$.

Ejemplo En las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se tiene que en la matriz A el máximo número de vectores columna linealmente independientes es 2, por lo tanto Rango (A)=2.
Se tiene que en la matriz B el máximo número de vectores columna linealmente independientes es 3, por lo tanto Rango (B)=3.