Regla de Cramer

Considérese el sistema de n ecuaciones con n incognitas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

o bien, escrito como producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Si la matriz M de los coeficientes un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene determinante distinto de 0, entonces el sistema tiene una solución única, que esta dada por*

$$\begin{aligned} x_1 &= \det\left(\frac{M_1}{M}\right) \\ x_2 &= \det\left(\frac{M_2}{M}\right) \\ &\ldots\ldots \\ x_k &= \det\left(\frac{M_k}{M}\right) \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= \det\left(\frac{M_n}{M}\right) \end{aligned}$$

donde M_k es la matriz que se obtiene de M reemplazando la columna de la variable x_k por la columna de los términos constantes del sistema.

Demostración. Como la matriz asociada M tiene rango n, podemos hacer operaciones elementales para convertirla en una matriz M' que tiene entradas distintas de 0 en la diagonal y todas las demás entradas iguales a 0. Podemos hacer esto sin cambiar el determinante de M. Usando las mismas operaciones elementales, la matriz aumentada MA se convierte en una matriz escalonada M'A que tiene entradas distintas de 0 en las entradas a_{kk} y 0 en las demás entradas excepto en la ultima columna que son unas constantes c_k.

El sistema de ecuaciones asociado a la matriz M'A es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= c_1 \qquad x_1 = \frac{c_1}{a_{11}} \\ a_{22}x_2 &= c_2 \qquad x_2 = \frac{c_2}{a_{22}} \\ &\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k &= c_k \qquad x_k = \frac{c_k}{a_{kk}} \\ &\ldots\ldots \\ a_{nn}x_n &= c_n \qquad x_n = \frac{c_n}{a_{nn}} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son las mismas que las soluciones del sistema original.
Como la matriz M' es diagonal su determinante es

$$a_{11}q_{22}...q_{kk}...a_{nn}$$

Y como la matriz M'_k se obtiene de M' reemplazando la columna k por la columna de las constantes c_i, M'_k tiene determinante

$$a_{11}q_{22}...c_k...a_{nn}$$

Asi que $x_k = \dfrac{c_k}{a_{kk}} = \dfrac{\det M'_k}{\det\ M'}$.
Como M' y M'_k se obtuvieron de M' y M'_k realizando operaciones elementales que no cambian los determinantes, entonces $x_k = \dfrac{c_k}{a_{kk}} = \dfrac{\det\ M'_k}{\det\ M'}$ □

La fórmula

$$x_k = \frac{c_k}{a_{kk}} = \frac{\det M_k}{\det\ M}, \quad k = 1, ..., n$$

dá la solución explícita del sistema siempre que $\det M \neq 0$.

Método de Cramer Para resolver el sistema de ecuaciones lineales

a) El sistema se escribe en forma matricial $AX = B$
b) Se calcula el determinante de A (que tiene que ser distinto de cero)
c) Si el determinante de A es distinto de cero, se calculan los determinantes de las matrices A_i, los cuales, se obtienen de la matriz A sustituyendo en ésta los elementos de su i-ésima columna por los elementos de la matriz de términos independientes B.
d) La solución del sistema es

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, ..., n$$

Ejemplo Encontrar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 5 \\ 2x + y + 4z &= 3 \\ 4x + 5z - y &= 2 \end{aligned}$$

Solución En este caso

1. La forma matricial $AX = B$ del sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Calculamos el determinante de la matriz A

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -60$$

   Asi que el sistema tiene solución única.
   calculamos los determinantes de las matrices A_i, los cuales, se obtienen de la matriz A sustituyendo en ésta los elementos de su i-ésima columna por los elementos de la matriz de términos independientes B.

3. Para la matriz A_1 se tiene

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -90$$

4. Para la matriz A_2 se tiene

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -41$$

5. Para la matriz A_3 se tiene

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\ A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Asi que la única solución es:

$$x = \frac{\det A}{\det A_1} = \frac{-90}{-69}$$
$$y = \frac{\det A}{\det A_2} = \frac{-41}{-69}$$
$$z = \frac{\det A}{\det A_3} = \frac{6}{-69}$$