Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incognitas

Ejemplo Considére un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

(donde a, b, c, d, m, n son números reales dados).
Para su resolución podemos proceder de la siguiente manera

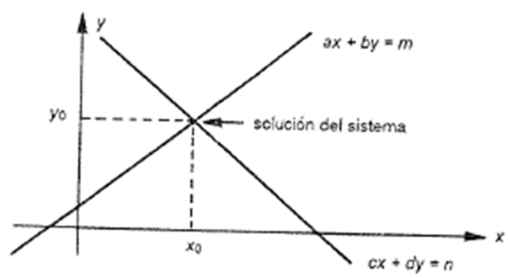
$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned} \overset{(-c)*(1)}{\Rightarrow} \begin{aligned} -cax - cby &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned} \overset{(a)*(2)}{\Rightarrow} \begin{aligned} -cax - cby &= m \\ acx + ady &= n \end{aligned} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} (ad - bc)y = an - cm$$

de donde se ve que si $ad - bc \neq 0$ entonces el sistema posee por solución

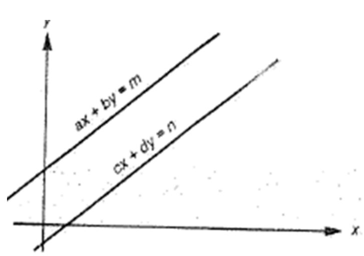
$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

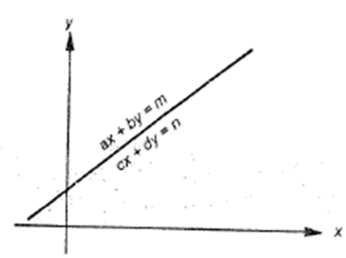
$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}$$

el valor de x se obtiene sustituyendo el valor para y encontrado en cualquiera de las ecuaciones y despejando.
Desde el punto de vista geométrico, cada una de las ecuaciones del sistema dado representa un recta en el plano. Hallar una solución del sistema consiste en localizar el punto en el que tales rectas se intersecan (punto cuyas coordenadas satisfacen simultaneamente ambas ecuaciones). Así pues, si $ad - bc \neq 0$ se tiene la siguiente situación:



mientras que si $ad - bc = 0$, puede acontecer que las dos rectas sean paralelas (en cuyo caso se dice que el sistema no tiene solución) o bien que se trate de la misma recta (en cuyo caso se dice que el sistema posee una infinidad de soluciones). Gráficamente se ve como





Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

En general, dos planos en el espacio tienen puntos en común, pues para que dos planos no se corten sus vectores normales deben satisfacer la condición de ser paralelos y, además, las distancias al origen de ambos planos deben ser distintas.
Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

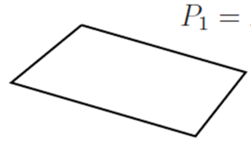
Donde las posibilidades para tres planos son:

1. Los tres planos pueden ser coincidentes; para ello es necesario que las dos últimas ecuaciones sean cada una un múltiplo de la primera, es decir, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda\ D_1$$

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 = \lambda\ D_1$$

es decir los vectores normales a los tres planos son paralelos y las distancias al origen coinciden

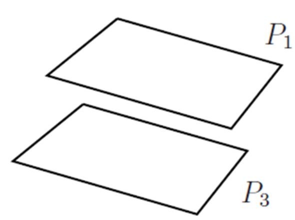


2. Dos de los planos coinciden y el tercero es paralelo; entonces la segunda ecuación es un múltiplo de la primera y para la tercera sólo los coeficientes que determinan el vector normal son múltiplo de los correspondientes coeficientes de la primera ecuación, mientras que el término independiente no debe ser ese mismo múltiplo del término independiente de la primera ecuación; en símbolos, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que

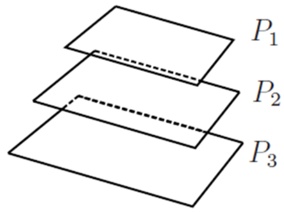
$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda\ D_1$$

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 = \mu\ D_1$$

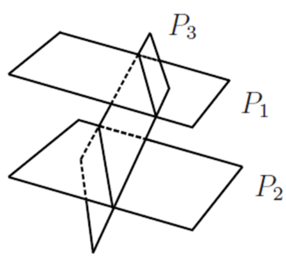
lo cual significa que los vectores normales a los tres planos son paralelos y dos de las distancias al origen coinciden mientras la tercera difiere



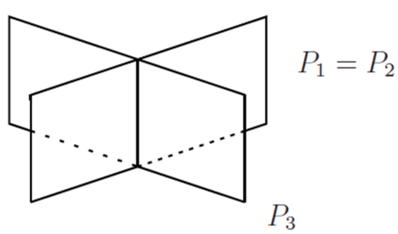
3. Si los tres planos son paralelos, los vectores normales de los dos últimos son cada uno múltiplo del vector normal del primero pero las distancias al origen son todas distintas; eso implica que existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que
$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 \neq \lambda\ D_1$$
$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 \neq \mu\ D_1$$



4. Cuando dos de los planos son paralelos y el tercero los corta, el vector normal del segundo es múltiplo del vector normal del primero pero las distancias no guardan la misma relación, y el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano, es decir, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que
$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 \neq \mu\ D_1$$
y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,
$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1)$$



5. Cuando dos de los planos coinciden y el tercero los corta, la segunda ecuación es múltiplo de la primera pero el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano; en símbolos, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que
$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda\ D_1$$
y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,
$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1)$$

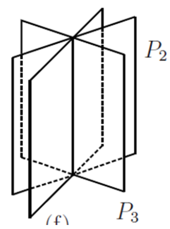


6. Si los tres planos tienen una recta en común, como las hojas de un libro, las ecuaciones son linealmente dependientes pues el tercer plano pertenece al haz de planos que contienen a la recta de intersección de los dos primeros; entonces los vectores normales son linealmente dependientes y los términos lineales satisfacen la misma combinación que los vectores normales, esto es, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2) \quad y \quad D_3 = \lambda\ D_1 + \mu\ D_2$$

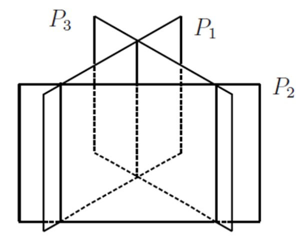
y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1)$$



7. Si los tres planos son como las caras de un prisma triangular, los vectores normales son linealmente dependientes pero los términos independientes no satisfacen la misma combinación lineal que los vectores, es decir, existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que

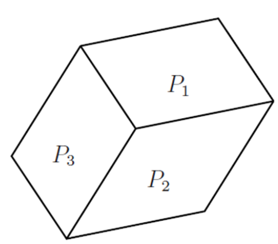
$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2) \quad y \quad D_3 \neq \lambda\ D_1 + \mu\ D_2$$



8. Si los tres planos son como las caras de una pirámide triangular, sus vectores normales no son linealmente dependientes y, en consecuencia, el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

es no nulo.



Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama ecuación lineal en las incognitas (o indeterminadas) $x_1, x_2, ...x_n$ a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

en donde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ son números reales dados.
Al número a_i que multiplica a la incognita x_i se le llama coeficiente de la incognita correspondiente. Al número b se le llama término independiente de la ecuación.
Si $b = 0$ se dice que la ecuación es homogénea. En caso contrario se dice que la ecuación es no homogenea.
Al conjunto de n ecuaciones lineales

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

se le llama sistema de n ecuaciones lineales en las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$, donde, $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., n$.
. Si los términos independientes b_i son todos iguales a cero, se dice que el sistema es homogéneo. En caso contrario se dice que es no homogéneo.

Definición 1. *Una solución del sistema es un elemento*

$$(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-veces}$$

que satisface cada una de las ecuaciones, es decir, para toda $i = 1, ..., n$

$$a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$$

Cuando un sistema de ecuaciones no tiene solución se dice que el sistema es inconsistente. Si un sistema tiene solución y ésta no es única, entonces se forma un conjunt o cuyos elementos son las soluciones del sistema y dicho conjunto puede tener más de un elemento.
Ahora bien puede ser que distintos sistemas de ecuaciones en las mismas indeterminadas tengan al mismo conjunto de soluciónes, aún cuando el número de ecuaciones de cada sistema sea diferente. Si tuviéramos un mecanismo para sustituir un sistema por otro más sencillo (por ejemplo que tenga más coeficientes cero) sin que cambie el conjunto de soluciones (incluyendo cuando el conjunto es vacio) se podría facilitar nuestro trabajo para encontrar dicha solución. Así pues éste es el camino a seguir.

Definición 2. *Dados dos sistemas de ecuaciones en n indeterminadas con coeficientes en* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n & a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{array}$$

diremos que los sistemas son equivalentes si el conjunto de soluciones de cada uno de ellos es el mismo.

Veamos cómo podemos obtener un sistema de ecuaciones equivalentes a uno dado de antemano. Serán tres las operaciones que realizaremos sobre un sistema de ecuaciones lineales para obtener otro con el mismo conjunto de soluciones y son las siguientes.

a) Intercambiar cualesquiera dos ecuaciones del sistema

b) Multiplicar una ecuación del sistema por un número $\alpha \neq 0$.
Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $(s_1, s_2, ..., s_n)$ es una solución de

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

si y sólo si es solución de

$$\alpha a_{i1}x_1 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i$$

c) Sumar a una ecuación otra ecuación del mismo sistema de ecuaciones lineales y sólo sustituir la ecuación i por la ecuación

$$(a_{i1} + a_{kl})x_1 + \cdots + (a_{in} + a_{kn})x_n = b_i + b_k$$

dejando las restantes ecuaciones iguales, el sistema resultante tendrá el mismo conjunto de soluciones que el original

Ejemplo Se requiere resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \quad (E1) \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \quad (E2) \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \quad (E3) \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \quad (E4) \end{aligned}$$

Procédase entonces a realizar operaciones elementales con el objeto de eliminar incognitas y obtener un sistema equivalente del cual se pueden leer facilmente las soluciones.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \quad (E1) \leftrightarrow (E2) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 1 \quad (E2) \to (E2) - 3(E1) \\ 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 &= 5 \quad (E3) \to (E3) - 2(E1) \\ 5x_3 + 14x_4 &= 4 \quad (E4) \to (E4) - 4(E1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 1 \\ -11x_3 - 20x_4 &= 2 \quad (E3) \to (E3) - 3(E2) \\ 5x_3 + 14x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 0 \\
x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 1 \\
x_3 + \frac{20}{11}x_4 &= \frac{-2}{11} \quad (E3) \to -\frac{1}{11}(E3) \\
5x_3 + 14x_4 &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\
x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 1 \\
x_3 + \frac{20}{11}x_4 &= \frac{-2}{11} \\
\frac{54}{11}x_4 &= \frac{54}{11} \quad (E4) \to (E4) - 5(E3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\
x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 1 \\
x_3 + \frac{20}{11}x_4 &= -\frac{2}{11} \\
x_4 &= 1 \quad (E4) \to \frac{11}{54}(E4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \quad (E1) \to (E1) + 3(E4) \\
x_2 + 5x_3 &= -9 \quad (E2) \to (E2) - 10(E4) \\
x_3 &= -2 \quad (E3) \to (E3) - \frac{20}{11}(E4) \\
x_4 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 1 \quad (E1) \to (E1) + (E3) \\
x_2 &= 1 \quad (E2) \to (E2) - 5(E3) \\
x_3 &= -2 \\
x_4 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 \quad (E1) \to (E1) + (E2) \\
x_2 &= 1 \\
x_3 &= -2 \\
x_4 &= 1
\end{aligned}$$