Sistemas de ecuaciones lineales: Matriz y Matriz aumentada

Dado el sistema

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Se asocia a éste la matriz A (de orden $m \times n$) de sus coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

llamada **matriz de coeficientes** (o matriz del sistema), así como la matriz $m \times (n+1)$.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

La misma matriz A con una última columna añadida, la de los términos independientes, llamada **matriz aumentada** de coeficientes (o del sistema).

Ejemplo Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{gathered}$$

cuya matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Se hace que el primer elemento distinto de cero de la primera línea sea 1. Esto es posible multiplicando por $\frac{1}{3}$ tal línea. Sin embargo, se puede intercambiar primeramente la primera y segunda líneas (pues esta línea comienza ya con 1). Se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

La siguiente etapa es, por medio de sustituir líneas por ellas mismas más múltiplos de otras, hacer ceros en las posiciones restantes de la columna debajo del 1 logrado esto es:

$$L_2 \to L_2 - 3L_1, \quad L_3 \to L_3 - 2L_1, \quad L_4 \to L_4 - 4L_1$$

Se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se realiza ahora lo siguiente

$$L_3 \to L_3 - 3L_2$$

obteniendose

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se realiza ahora

$$L_3 \to -\frac{1}{11}L_3$$

para lograr un 1 como primer elemento no nulo de la tercera línea

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 5 & 14 & 4 \end{array}\right)$$

Se hace ahora

$$L_4 \to L_4 - 5L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{54}{11} & \frac{54}{11} \end{array}\right)$$

Para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la cuarta línea se realiza

$$L_4 \to \frac{11}{54}L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Obsérvese que esta matriz se encuentra ya en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida, se comienza con el último uno logrado (en el paso anterior) y se procede a volver ceros las posiciones restantes (éncima de él).
Para esto se realiza

$$L_1 \to -L_1 + 3L_4, \quad L_2 \to L_2 - 10L_4, \quad L_3 \to L_3 - \frac{20}{11}L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora con el siguiente uno se hace lo mismo: se realiza

$$L_1 \to L_1 + L_3, \quad L_2 \to L_2 - 5L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente se hace

$$L_1 \to L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y el sistema que representa esta matriz es entonces $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1$ que es la solución del sistema.