Lógica y demostraciones

La teoría de la lógica deductiva, como se aplica a las matemáticas, se divide naturalmente en dos áreas principales:

1. El cálculo de proposiciones
2. El cálculo de las funciones proposicionales

La verdaderas matemáticas son expresadas en un lenguaje, y en efecto, algunos recalcan que es un lenguaje. Las verdades matemáticas son expresadas en oraciones. Incluso estas oraciones pueden ser abstractas o simbólicas; y deberán ser claras y muy poco o nada ambiguas. Por otra parte oraciones juntas implican otras. La lógica nos permite aclarar estas relaciones y distinguir entre implicaciones válidas e inválidas.
Hay dos tipos de oraciones que se presentan muy comúnmente en matemáticas:

1. Proposiciones
2. Funciones proposicionales

Definición 1. *Una proposición es una oración o una expresión matemática que afirma o niega algo.*

De esta manera, una proposición tiene un valor de verdad que puede ser verdadera o falsa.

Ejemplos de proposiciones

- 3+5=10
  Donde podemos notar que el valor de verdad es falso, pero sigue siendo una proposición, y lo mismo ocurre si el valor de verdad fuera verdadero.
- x+y=10
  Donde a simple vista podríamos decir que es una proposición, pero de acuerdo a nuestra definición, esta no posee ningún valor de verdad, es decir, no podemos otorgarle ningún valor ya que los valores respectivos para "x" y "y" no están especificados.

Lo importante no son las palabras que usamos para expresar la proposición, sino el significado de ésta. En consecuencia dos oraciones pueden expresar la misma proposición. Por ejemplo "John mide 1.73 m de estatura", es la misma proposición que "Si John midiera 7 cm más, su estatura sería de 1.80 m". Aún así, traduciendo la oración a otro lenguaje, esta no dejaría de ser la misma proposición.
Realmente la noción de "proposición" es una abstracción. Las palabras que usamos son meramente una representación tangible de la proposición. Tienen la misma relación a la proposición (abstracta) que un triángulo tangible dibujado en un papel. De hecho todos los conceptos matemáticos son abstractos.

Proposiciones compuestas Proposiciones simples pueden llegar a ser combinadas para formar proposiciones compuestas. Los lógicos identificaron algunos conectivos comúnmente usados para este propósito, y son los siguientes:

Conectivo	Operación	Significado	Notación
$\neg$	Negación	No P o no es cierto que P	$\neg P$
$\wedge$	Conjnución	P y Q	$P \wedge Q$
$\vee$	Disyución	P o Q	$P \vee Q$
$\Rightarrow$	Implicación	Si P entonces Q	$P \Rightarrow Q$
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	P si y solo si Q	$P \Leftrightarrow Q$

En el estudio de la lógica analizamos la relación entre los valores de verdad de proposiciones simples y los de proposiciones compuestas.

Tablas de verdad Una tabla de verdad es un método para determinar cuando una proposición es verdadera

Conjunción Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P y Q". Se usa el símbolo $\wedge$ para indicar la palabra "y". De esta manera, $P \wedge Q$ significa "P y Q".
La proposición $P \wedge Q$ es verdadera si ambas proposiciones P y Q son verdaderas. En cualquier otro caso, es falsa. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos Tenemos los siguientes

1. a) "Comí algo y me fuí a dormir". En el caso de que ambas no fueran verdaderas, entonces el valor será falso.
2. c) $2 < 1 < 3$. Si es una conjunción ya que afirmamos que $2 < 1$ y $1 < 3$, aunque el valor de verdad sea falso (debido a que 2 no es menor que 1).

Disyunción Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q, podemos combinarlas para formar una nueva proposición "P o Q". Se usa el símbolo $\vee$ para indicar la palabra "o". De esta manera, $P \vee Q$ significa "P o Q".
La proposición $P \vee Q$ significa que una o ambas proposiciones son verdaderas. Esto difiere del significado usual que tiene "o" en el lenguaje cotidiano, donde significa una alternativa o la otra, de manera excluyente, cuando hay dos alternativas. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como podemos observar, al menos una de las proposiciones tiene que tener por valor de verdad "verdadero (V)" para que la disyunción sea verdadera. En la vida diaria, comúnmente usamos el "o" en un sentido diferente, este es, el sentido exclusivo, para excluir posibilidades. Ejemplo: "O me crees o no". Donde debería ser interpretado en el sentido exclusivo de "o". Aunque en una conversación ordinaria le corresponde a cada quien decidir qué es lo que él/élla quiere decir. Pero en matemáticas, no nos podemos permitir tal ambigüedad. Así estamos de acuerdo en usar solamente el sentido inclusivo "o".

Ejemplos Tenemos los siguientes

1. “Te veré esta noche o te llamaré”. (La “o” inclusiva permite que se puedan hacer ambas).
2. $7 \geq 3$ (Aquí lo que queremos expresar es que “o 7>3 o 7=3, recordemos la definición y la tabla de verdad de esta disyunción).

Negación Otra manera de obtener nuevas proposiciones a partir de otras es usando la palabra no. Dada una proposición cualquiera P; podemos formar una nueva proposición no es verdadero que P.
Esto se resume en la siguiente tabla de verdad.

P	¬ P
V	F
F	V

Ejemplo Consideremos la siguiente oración
Siempre hay tranquilidad
esta oración se puede negar de diferentes formas
(a) No siempre hay tranquilidad
(b) No es cierto que siempre haya tranquilidad
(c) A veces no hay tranquilidad
Se observa que en este caso la oración que se forma al simplemente anteponer un no a la proposición sí está bien redactada en español. El inciso (c) usa el a veces para contrarrestar al siempre.

Proposiciones codicionales Otra manera de conectar dos proposiciones es mediante el uso de condicionales. Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos formar la nueva proposición Si P; entonces Q. Esta proposición se escribe de manera simbólica como P⇒ Q; la cual también se lee P implica Q. Que la proposición P⇒Q es verdadera significa que si P es verdadera entonces Q también debe ser verdadera (P verdadera obliga a que Q sea verdadera). Una proposición de la forma P⇒Q se conoce como proposición condicional (Q sería verdadera bajo la condición de que P sea verdadera). El signi

cado de P⇒ Q nos dice que la única manera en que la proposición P⇒ Q es falsa es cuando P es verdadera y Q falsa. Así, la tabla de verdad para P⇒ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇒ Q
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

La proposición P se llama a menudo hipótesis y el postulado Q conclusión, esto se puede reducir a:
Si P entonces Q
P implica Q
En simbolos matemáticos $P \Rightarrow Q$
Hay entonces cuatro posibles casos a considerar:
1. P es verdadero y Q es verdadero
2. P es verdadero y Q es falso
3. P es falso y Q es verdadeo
4. P es falso y Q es falso

Ejemplos Tenemos los siguientes

1. Si no puedes venir a la fiesta, entonces la cancelaremos
2. Si $x > 2$, entonces $x > 1$

Proposiciones bicondicionales Dadas dos proposiciones cualesquiera P y Q; podemos considerar tanto P⇒ Q como su recíproca Q ⇒ P:
En primer lugar, P ⇒ Q no es lo mismo que Q ⇒ P; pues tienen distinto signifcado, y en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.
Consideremos ahora la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Ésta afrma que tanto P ⇒ Q como Q ⇒ P son verdaderas.
Se usa el símbolo ⇔, para expresar este significado. En consecuencia, leemos P ⇔ Q, P si y solo si Q. Una proposición de la forma P ⇔ Q se conoce como proposición bicondicional.

Ejemplo Por ejemplo, sea a un número entero fijo y consideremos:
P : a es par,
Q : a es múltiplo de 2.
Entonces:
P ⇒ Q : Si a es par, entonces a es múltiplo de 2;
Q ⇒ P : Si a es múltiplo de 2; entonces a es par.
Así, tenemos la proposición (que es verdadera)
P ⇔ Q : a es par, **si y solo si**, a es múltiplo de 2:

Así, la tabla de verdad para P⇔ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	(P ⇒ Q) ∧ (Q ⇔ P)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Por lo que la tabla de verdad para P⇔ Q es la siguiente.

P	Q	P ⇔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V