Lógica y demostraciones (parte 2)

Dadas dos proposiciones P y Q, se tienen las siguientes tablas de verdad

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	¬ P
V	F
F	V

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	Q ⇔ P
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Usando esta información comparemos las siguientes tablas

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	Q ∧ P
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observamos que las proposiciones compuestas $P \wedge Q$ y $Q \wedge P$ son lógicamente equivalentes pues la última columna de sus respectivas tablas de verdad es igual.

Definición 1. *Decimos que dos proposiciones compuestas P y Q son lógicamente equivalentes si y sólo si la última columna de sus tablas de verdad es igual.*

Denotamos la equivalencia lógica de dos proposiciones P y Q como

$$P \equiv Q$$

Ejemplos Vamos a comprobar la ley de Morgan $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	Q	Q ∧ P	$\neg(Q \wedge P)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

¬ P	¬ Q	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Ejemplo Vamos a comprobar la ley de Morgan $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	Q ∨ P	$\neg(Q \vee P)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

¬ P	¬ Q	$\neg P \wedge \neg Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Importante: Las leyes de Morgan muestran un principio importante: La negación de un "y" no es otro "y", sino un "o". Similarmente la negación de un "o" es un "y".

Ejemplo Una forma equivalente de una implicación es:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q$$

Para probarlo usaremos la siguiente tabla de verdad:

P	Q	(P $\Rightarrow$ Q)	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Desde que vimos que la tercer columna y la quinta son idénticas, hemos probado que ambas proposiciones son lógicamente equivalentes.

Ejemplo Una forma equivalente de una implicación es:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \;\Rightarrow\; \neg P)$$

Para probarlo usaremos la siguiente tabla de verdad:

P	Q	(P $\Rightarrow$ Q)	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Esta equivalencia lógica es conocida como Contrapositiva

Ejemplo Otra forma equivalente de una implicación es:

$$(P \;\Rightarrow\; Q) \equiv P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; W \wedge \neg W$$

para probarlo usaremos la siguiente tabla de verdad:

P	Q	P$\Rightarrow$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	P$\wedge$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	$\neg$Q	P$\wedge$ $\neg$Q
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

W	$\neg$W	W$\wedge$ $\neg$W
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

P$\wedge$ $\neg$Q	W$\wedge$ $\neg$W	P$\wedge$ $\neg$Q $\Rightarrow$ W$\wedge$ $\neg$W
F	F	V
V	F	F
F	F	V
F	F	V

Esta equivalencia lógica es conocida como reducción al absurdo

Ejemplo Las proposiciones $P \Leftrightarrow Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ son lógicamente equivalentes, como podemos ver en la siguiente tabla de verdad.

P	Q	¬ P	¬Q	(P ∧ Q)	(¬P ∧ ¬Q)	P ⇔ Q	(P ∧ Q)∨ (¬P ∧ ¬Q)
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Esto se evidencia en la coincidencia línea por línea de las dos últimas columnas. La equivalencia lógica de $P \Leftrightarrow Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ la expresamos de la siguiente manera

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Definición 2. *Tautología. Es un proposición compuesta que siempre tendrá el valor de verdad "verdadero", sin importar los valores de verdad de sus componentes.*

Ejemplo algunas tautologías

a) $P \vee \neg P$

b) $P \Rightarrow P$

c) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

d) $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$

Para poder probar que son tautologías podemos usar tablas de verdad. Por ejemplo, verificando c) de los ejemplos anteriores:

P	Q	P ∨ Q	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Aquí nos damos cuenta de que la última columna, todos los valores de verdad indican "verdadero", es decir, es una tautología.

En el siguiente resultado trataremos de mostrar cómo estan ligados los conceptos de **tautología** y **equivalencia lógica**.

Teorema 1. *Sean P y Q cualesquiera proposiciones. Entonces $P \Leftrightarrow Q$ es una tautológia si y sólo si P y Q son lógicamente equivalentes.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología, entonces su valor de verdad es siempre verdadero.
Por la tabla del conectivo $\Leftrightarrow$

P	Q	Q $\Leftrightarrow$ P
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

esto significa que el valor de verdad de P y Q en cada situación es el mismo, donde se tenga el último valor de verdad como verdadero. Pero entonces las ablas de verdad de P y Q necesariamente son las mismas, por lo que P y Q son lógicamente equivalentes.
$\Leftarrow$. Ahora suponemos que P y Q son lógicamente equivalentes, entonces sus tablas de verdad son iguales. Por lo tanto, P y Q toman el mismo valor de verdad cuando se fija el valor de verdad de las letras de proposición que las componen. Como el valor de verdad del conectivo $\Leftrightarrow$ es verdadero siempre que las proposiciones que conecta tengan el mismo valor de verdad, y P y Q toman el mismo valor de verdad en cada situación, $P \Leftrightarrow Q$ es siempre verdadera y, por tanto, es tautología $\square$