Razonamiento deductivo válido Todo desarrollo matemático exige razonar y argumentar en forma válida. Sin embargo, es importante decir aquí que no hay una definición exacta de lo que significa demostrar una afirmación en matemáticas.

Definición 1. *Un razonamiento deductivo es una colección finita de proposiciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n$, llamadas premisas o hipótesis, junto con la una proposición ψ, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que se deriva de las premisas.*

Definición 2. *Decimos que un razonamiento deductivo es válido si y sólo si de la verdad de las premisas se sigue la verdad de la conclusióin. Es decir, un razonamiento es válido si y sólo si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.*

Es importante notar que de un razonamiento no se dice que es verdadero o falso, más bien que es válido o no. Las que pueden ser verdaderas o falsas son las proposiciones que forman parte del razonamiento y no el razonamiento en sí.

Teorema 1. *Un razonamiento cuyas premisas sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n$ y conclusión sea ψ es válido si y sólo si la proposición*

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$$

es una tautología

Demostración. ($\Rightarrow$).
Supongamos que el razonamiento $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es válido. Recordemos que en la lógica matemática sólo hay dos valores de verdad y cualquier proposición es verdadera o falsa (y nunca ambas cosas a la vez). En particular la proposición $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n)$ es verdadera o es falsa (más no ambas). Veamos que sucede en cada caso.

a) Si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n$ es falsa, entonces, por la tabla de verdad del condicional,

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

obtenemos que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es verdadera.

b) Si $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n$ es verdadera, entonces, por la tabla de verdad de la conjunción,

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

cada φ_i es verdadera. De aquí que todas las premisas del razonamiento son verdaderas y, como el razonamiento válido, se tiene que ψ es verdadera, pues de la verdad de las premisas se debe seguir la verdad de la conclusión. Dado que tanto $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n$ como ψ son verdaderas, obtenemos que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es verdadera.

En cualquiera de los dos casos se llega a que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es verdadera, por lo que

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$$

es una tautología.
$(\Leftarrow)$
Ahora supongamos que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es una tautología. Para ver que el razonamiento es válido, supongamos que las premisas son verdaderas, es decir, que cada φ_i es verdadera. Entonces según la tabla de verdad de la conjunción

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n$ es verdadera. Ahora como por suposición $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ es verdadera en cualquier instancia. Dado que tanto $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n$ como $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge ... \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ son verdaderas, se tiene forzosamente que ψ es verdadera. Es decir de la verdad de las premisas del razonamiento se siguio la verdad de la conclusión. Por lo tanto, el razonamiento es válido. $\square$