Lógica y demostraciones (parte 4)

Teorema 1. *Sean P y Q cualesquiera proposiciones. Entonces $P \Leftrightarrow Q$ es una tautológia si y sólo si P y Q son lógicamente equivalentes.*

Ejemplo La proposición

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)]$$

es una tautología.
Efectivamente, su tabla de verdad es

P	Q	P⇒Q	¬ Q	¬ P	¬ Q⇒ ¬ P	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)]$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Ejemplo Considerempos la proposición

$$[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$$

y costruyamos su tabla de verdad

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R$
V	V	V
F	F	F
V	V	V
F	V	F
V	V	V
V	F	F
V	V	V
V	V	V

Tenemos entonces que

$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
V	V	V
F	F	V
V	V	V
F	F	V
V	V	V
F	F	V
V	V	V
V	V	V

Concluimos entonces que

$$[(P \wedge Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

es una tautología.

Demostración Es un razonamiento deductivo válido para una afirmación matemática

Métodos de demostración Se aplican cuando se desea deducir una proposición Q a partir de una proposición P que se considera verdadera. Es decir se aplican para demostrar la veracidad de Q, suponiendo la veracidad de P.

Demostraciones directas Las demostraciones directas, por lo regular, tratan de demostrar una implicación de la forma $P \Rightarrow Q$. La estrategia a seguir es encontrar una sucesión finita de pequeñas implicaciones todas ellas verdaderas, partiendo de $P = Q_1$ y terminando en $P_n = Q$. En cada paso, se pueden usar la hipótesis p y resultados previamente establecidos, como definiciones, axiomas u otras proposiciones, incluyendo las que se van construyendo en la sucesión.
Este método se basa en el siguiente resultado lógico.
Observando las tablas de verdad de la proposición $P \Rightarrow Q$ tenemos que cuando $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ son verdaderas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
V	V	F

Necesariamente Q es verdadera, esto es, de P y $P \Rightarrow Q$ verdaderas se obtiene que Q es verdadera. A esta regla se la llama **modus ponens**. De esta manera, si queremos mostrar que Q es verdadera a partir de que P es verdadera, debemos ver que $P \Rightarrow Q$ es verdadera. A P se le llama **hipótesis** y a Q **conclusión**.
La demostración de una proposición consiste en que, de suponer la hipótesis verdadera y del uso adecuado de proposiciones verdaderas ya conocidas obtengamos que la conclusión es verdadera. Esto es, si suponemos que P es verdadera y si se tiene una sucesión de proposiciones verdaderas

$$P \Rightarrow P_1,\ P_1 \Rightarrow P_2, ..., P_{n-1} \Rightarrow P_n,\ P_n \Rightarrow Q$$

entonces podemos afirmar que Q es verdadera y esto es porque: si P y $P \Rightarrow P_1$ son verdaderas, entonces P_1 es verdadera; como P_1 es verdadera y $P_1 \Rightarrow P_2$ es verdadera, entonces P_2 es verdadera; continuando de esta manera P_n es verdadera y por ser $P_n \Rightarrow Q$ verdadera; concluimos que Q es verdadera. Luego $P \Rightarrow Q$ es verdadera si P lo es.

Ejemplo 1 Si k es un número impar, entonces k^2 es un número impar

Demostración. k es impar entonces $k = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ elevando al cuadrado ambos miembros

$$k^2 = (2m + 1)^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

⇒ Desarrollando el binomio

$$k^2 = 4m^2 + 4m + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

⇒ Factorizando el 2

$$k^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \quad m \in \mathbb{Z}$$

⇒ y como la suma de números enteros es un número entero

$$k^2 = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto k^2 es un número impar □

Demostraciones por Contrarreciproca Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$(P \ \Rightarrow \ Q) \ \Leftrightarrow \ [(\neg Q) \ \Rightarrow \ (\neg P)]$$

es decir se parte de la negación de la conclusión $(\neg Q)$ y de ello se deduce la negación de la hipótesis $(\neg P)$

Ejemplo 1 Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $B^c \subset A^c$

Demostración. Negación de la conclusión

$$B^c \not\subset A^c$$

⇒ por definición de subconjunto

$$\exists\, x \ \in \ B^c, \quad \ni \quad x \ \notin \ A^c$$

⇒ por la definición de complemento

$$\exists\, x \ \in \ A, \quad \ni \quad x \ \notin \ B$$

⇒ por la definición de subconjunto

$$A \not\subset B$$

que es la negación de la hipótesis □

Demostración por reducción al absurdo Este método de demostración esta basado en la equivalencia lógica

$$(P \ \Rightarrow \ Q) \equiv P \wedge \neg Q \ \Rightarrow \ W \wedge \neg W$$

El concepto contrario al de tautología. Consideremos la tabla de verdad de $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Obsérvese que esta proposición es siempre falsa. A este tipo de proposiciones las llamamos contradictorias.

Definición 1. *Una contradicción es una proposición que siempre es falsa independientemente de los valores de verdad que tengan las proposiciones que la componen.*

Ejemplo Demostrar lo siguiente: Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$

Demostración. Vamos a suponer la hipótesis $A \subset B$ y la negación de la conclusión $A - B \neq \emptyset$

$$\underbrace{A \subset B}_{P} \quad y \quad \underbrace{A - B \neq \emptyset}_{\neg Q}$$

$\Rightarrow$ usando las definiciones

$$\underbrace{\forall\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists\, x \in A \;\; y \;\; x \notin B}_{\neg Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{P} \quad y \quad \underbrace{\exists\, x \in A \;\ni\; x \notin B}_{Q}$$

Por lo tanto se tiene

$$\underbrace{\forall\, x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}_{W} \quad y \quad \underbrace{\exists\, x \in A \;\ni\; x \notin B}_{\neg W}$$

esto es un absurdo □

Demostración por casos. Este método de demostración se basa en la equivalencia lógica

$$[(P \wedge Q) \;\Rightarrow\; R] \;\Leftrightarrow\; (P \;\Rightarrow\; R) \wedge (Q \;\Rightarrow\; R)$$

Ejemplo Sabemos que en el sistema de los números complejos existe un número que denotamos por i tal que $i^2 = -1$ y que cada número real es un número complejo.
P_1 : x es un número real
P_2 : $x = i \cdot y$ donde y es un número real
Q : x^2 es un número real

Demostración. Para demostrar que $(P_1 \vee P_1) \;\Rightarrow\; Q$ demostraremos que $P_1 \;\Rightarrow\; Q$ y $P_2 \;\Rightarrow\; Q$ son ambas verdaderas.

a) $P_1 \;\Rightarrow\; Q$ es verdadera porque si x es un número real, x^2 es un número real ya que el producto de dos números reales es un número real.

b) $P_2 \;\Rightarrow\; Q$ es verdadera porque

$$x \cdot iy \;\Rightarrow\; x^2 = (i \cdot y)^2 \;\Rightarrow\; x^2 = i^2 \cdot y^2 \;\Rightarrow\; x^2 = (-1)y^2 \;\Rightarrow\; x^2 = -y^2$$

donde $-y^2$ es un número real.

entonces podemos afirmar sin lugar a dudas que $P_1 \vee P_2 \;\Rightarrow\; Q$ es verdera □

Método por contraejemplo. Este se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para todos los elementos de un cierto conjunto.
Para demostrar la falsedad de proposiciones de este tipo, basta exhibir un elemento que satisfaga la hipótesis de la proposición pero que no satisfaga la conclusión.
A dicho elemento se le conoce con el nombre de contraejemplo.

Ejemplo Demuestre que es falsa la siguiente proposición

$$|a+b| = |a| + |b| \quad para \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Demostración. Si tomamos $a = 5$, $b = -3$ se tiene

$$|5-3| = |2| = 2 \neq 8 = 5+3 = |5| + |-3|$$

por tanto

$$|a+b| = |a| + |b| \quad para \quad a, b \in \mathbb{R}$$

es falsa □