Combinaciones

El concepto de combinaciones est´a ligado al concepto de subconjunto.

Teorema 1. *Si A es un conjunto finito, entonces el número de subconjuntos de A es $2^{card(A)}$, es decir*

$$card(P(A)) = 2^{card(A)}$$

Demostración. La hacemos probando que $card(P(A) = card(^A\{0,1\})$, pues usando el principio de la exponenciación, tenemos que

$$card(^A\{0,1\}) = [card(\{0,1\})]^{card(A)}$$

y entonces

$$card(P(A) = card(^A\{0,1\}) = [card(\{0,1\})]^{card(A)} = 2^{card(A)}$$

Para cada subconjunto M de A, definimos su función característica como la función $\chi_M : A \to \{0,1\}$ tal que

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin M \\ 1 & si \quad x \in M \end{cases}$$

Sea $F : P(A) \to^A \{0,1\}$ definida como $F(M) = \chi_M$. Veamos que F es biyectiva.
Sean $M, N \subseteq A$ tales que $F(M) = F(N)$, entonces $\chi_M = \chi_N$. Queremos ver que $M = N$.
Sea $m \in M$, entonces $\chi_M(m) = 1$. Como $\chi_M = \chi_N$, $\chi_N(m) = 1$. Entonces, por la definición de función característica, $m \in N$. Por lo tanto $M \subseteq N$. Análogamente se puede verificar que $N \subseteq M$, por lo que $M = N$ y F es inyectiva.
Para ver que F es sobre, sea $f \in^A \{0,1\}$. Tomamos

$$M_f = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$$

claramente $M_f \subseteq A$. Queremos ver que $F(M_f) = f$.
Sabemos que $F(M_f) = \chi_{M_f}$. Sea $x \in A$.

1. Caso 1. Si $x \in M_f$, por la definición de M_f, $f(x) = 1$. Por otro lado, $\chi_{M_f}(x) = 1$, pues $x \in M_f$. Entonces, si $x \in M_f$, $\chi_{M_f}(x) = f(x)$
2. Si $x \notin M_f$, por definición de M_f, $f(x) \neq 1$. Como $f : A \to \{0,1\}$, $f(x) = 0$.
   Por otro lado, $\chi_{M_f}(x) = 0$, pues $x \notin M_f$. Entonces, si $x \notin M_f$, $\chi_{M_f}(x) = f(x)$

Por lo tanto, $\chi_{M_f} = f$ y $F(M_f) = f$, por lo que F es sobre.
Como existe una biyección entre $P(A)$ y $^A\{0,1\}$. Por el Principio de la exponenciación

$$card(^A\{0,1\}) = [card(\{0,1\})]^{card(A)} = 2^{card(A)}$$

Por lo tanto, el número de subconjuntos de A es $2^{card(A)}$ □

Sin embargo, a veces quisieramos saber cuántos subconjuntos de cierto tamaño hay. Es decir, si A tiene n elementos y $m \leq n$, ¿cuántos subconjuntos de A con m elementos hay?

Definición 1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Sea A un conjunto con n elementos. Los subconjuntos de A que constan de m elementos son llamados las combinaciones de los elementos de A tomados de m en m. Denotamos con $\binom{n}{m}$ al número de combinaciones de un conjunto con n elementos tomados de m en m.*

Ejemplo Sea $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Las combinaciones de I_5 tomadas de 0 en 0 son: $\emptyset$
- Las combinaciones de I_5 tomadas de 1 en 1 son:
$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$
- Las combinaciones de I_5 tomadas de 2 en 2 son:
$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$$
- Las combinaciones de I_5 tomadas de 3 en 3 son:
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$$
- Las combinaciones de I_5 tomadas de 4 en 4 son:
$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$$
- Las combinaciones de I_5 tomadas de 5 en 5 son:
$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Observe que hay en total 32 combinaciones de I_5 tomadas de m en m para todas las m posibles, esto lo podíamos saber sin darlas todas, pues por el teorema anterior hay 2^5 subconjuntos de I_5

Teorema 2. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Entonces*
$$\binom{n}{m} P_m = O_n^m$$

Demostración. Sea A un conjunto con n elementos.
Sea O el conjunto de todas las ordenaciones delconjunto A tomadas de m en m y sea C el conjunto de todas las combinaciones de los elementos de A tomados de m en m.
Entonces $card(O) = O_n^m$ y $C = \binom{n}{m}$.
Definimos una función $F : O \to C$ como
$$F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$$

Veamos que F es sobre.
Sea $c \in C$, entonces C es un subconjunto de A con m elementos, digamos $c = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, donde $b_i \neq b_j$, si $i \neq j$. Sea
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$
entonces f es una ordenación de los elementos de A tomados de m en m, es decir, $f \in O$. Además,
$$F \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix} = \{b_1, b_2, ..., b_m\} = c$$

por lo tanto F es sobre.
Sean $c_1, c_2, ..., c_k$ los distintos subconjuntos de A con m elementos, donde

$$k = card(c) = \binom{n}{m}$$

Definamos para cada $i \in I_k$, el conjunto

$$o_i = \left\{ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \mid F(f) = c_i \right\}$$

Entonces O se puede escribir como $O = o_1 \cup o_2 \cup \cdots \cup o_k$. entonces

$$card(O) = card(o_1) + card(o_2) + \cdots + card(o_k)$$

Además, si $m > 1$, F no es inyectiva, pues cualquier permutación del conjunto $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ va a dar a $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ bajo F. En otras palabras, para cada $i \in I_k$ hay P_m ordenaciones de A tomadas de m en m que van a dar a c_1 bajo F. Por lo tanto, para cada $i \in I_k$, se tiene que

$$card(o_i) = P_m$$

Así

$$O_n^m = card(O) = P_m k = P_m \binom{n}{m}$$

□

Usando este resultado, damos una fórmula para calcular combinaciones.

Corolario 1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Entonces*

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Demostración. Por el resultado anterior,

$$\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

□

Sabemos que el número de subconjuntos de un conjunto de un conjunto finito A es $2^{card(A)}$. De aquí podemos deducir que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

El siguiente triángulo es conocido como el triángulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Calculando estos números, onbtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Observando el triángulo de Pascal habiendo calculado los números, podemos percibir que el triángulo es simétrico como demostramos en el siguiente lema

Lema 1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Demostración. Sea A un conjunto con n elementos. Sea S el conjunto de todas las combinaciones de elementos de A tomados de m en m. Sea T el conjunto de todas las combinaciones de elementos de A tomados de $n-m$ en $n-m$. Definimos la función $f : S \to T$ como $f(s) = A - s$. Si $s \in S$, entonces s tiene m elementos, por lo que $A - s$ tiene $n - m$ elementos y efectivamente $A - s \in T$. La función $g : T \to S$ dada por $g(t) = \dfrac{A}{t}$ para cada $t \in T$ es la inversa de f. Así, se puede concluir que f es biyectiva. $\square$

También podemos observar en el Triángulo de Pascal que, a partir del tercer renglón, un número de enmedio es la suma de los dos números más cercanos del renglón anterior.

Teorema 3. ***Fórmula de recurrencia del Triángulo de Pascal.*** *Si $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $k \leq n-1$, entonces*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Demostración. Sean $n \geq 2$ y $k \leq n$. Tomemos el conjunto $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de combinaciones de I_n tomadas de k en k, es decir, $\mathcal{C}$ es el conjunto de subconjuntos de I_n con k elementos. Sean C_1 y C' los subconjuntos de $\mathcal{C}$: C_1 es el conjunto de subconjuntos de I_n con k elementos que tienen al 1 como elemento y C' es el conjunto de subconjuntos de I_n con k elementos que no tienen al 1 como elemento. Entonces

$$\mathcal{C} = C_1 \cup C' \quad y \quad C_1 \cap C' = \emptyset$$

es decir $\{C_1, C'\}$ es una partición de $\mathcal{C}$. Por lo que $card(\mathcal{C}) = card(C_1) + card(C')$.
Ahora, para formar un elemento de I_n con k elementos que tengan al 1, necesitamos elegir $k-1$ elementos de los $n-1$ restantes de I_n. Entonces hay

$$\binom{n-1}{k-1}$$

subconjuntos de I_n con k elementos que tienen al 1 y

$$card(C_1) = \binom{n-1}{k-1}$$

Por otro lado, los subconjuntos de I_n con k elementos que no tienen al 1, se obtienen eligiendo k elementos del conjunto $I_n - \{1\} = n - 1$, por lo que hay

$$\binom{n-1}{k}$$

subconjuntos de I_n con k elementos que no tienen al 1 y

$$card(C') = \binom{n-1}{k}$$

Así,

$$card(\mathcal{C}) = card(C_1) + card(C') = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

es decir,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

□

En cursos de secundaria se ense˜ae a construir el Triángulo de Pascal usando la Fórmula de recurrencia del Triángulo de Pascal (que acabamos de demostrar). Este triángulo se utiliza en estos cursos para desarrollar expansiones binomiales de la forma $(a+b)^n$ con $n \in \mathbb{N}^+$. La regla que se da es la siguiente: los números en el renglón número n del triángulo son los coeficientes de la expansión binomial correspondientes a $a^n b^0$, $a^{n-1}b^1$, $a^{n-2}b^2$,..., $a^1 b^{n-1}$, $a^0 b^n$ en este orden. Esta regla es en realidad el Teorema del Binomio que demostramos enseguida.

Teorema 4. ***Teorema del binomio.*** *Si $n \in \mathbb{N}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Demostración. La idea intuitiva es que

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n-veces}$$

y al desarrollar este producto se obtiene un término donde aparezca b^k seleccionando b en k factores $(a+b)$ y seleccionando a en los $n-k$ factores restantes, por lo que el coeficiente correspondiente a $a^{n-k}b^k$ en el desarrollo del producto $(a+b)^n$ es

$$\binom{n}{k}$$

La prueba se hace por inducción

a) Si $n = 1$, entonces $(a+b)^1 = a + b$. Por otro lado

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k = \binom{1}{0}a^1 b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1 = a + b$$

b) Supongamos que el resultado es válido para n

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

c) Veamos que el resultado se cumple para $n+1$. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= (a+b)^n \cdot a + (a+b)^n \cdot b \\
&= \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right] \cdot a + \\
&\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right] \cdot b \\
&= \left[\binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^{n}b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}ab^n\right] + \\
&\left[\binom{n}{0}a^{n}b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}\right] \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}a^n + \binom{n+1}{1}a^{n-1}b + \binom{n+1}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\
&= \binom{n+1}{0}a^n + \binom{n+1}{1}a^{n-1}b + \binom{n+1}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^n
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene al juntar términos semejantes y aplicar la fórmula de recurrencia de Pascal. También se tiene

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad y \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

Así el resultado es válido para $n+1$

$\square$

Ejemplo Pruebe lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Solución En este caso

$$2^n = (1+1)^n \underbrace{=}_{Teorema\ del\ binomio} \binom{1}{0}1^n + \binom{1}{1}1^{n-1}1 + \binom{1}{2}1^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{1}{n+1}1^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Ejemplo Pruebe lo siguiente: Si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

Solución En este caso

$$0 = (1+(-1))^n \underbrace{=}_{Teorema\ del\ binomio} \binom{1}{0}1^n(-1)^0 + \binom{1}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{1}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + \binom{1}{n+1}(-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$