Números Naturales $\mathbb{N}$

Sistema axiomático de Peano El sistema axiomático de Peano es esencialmente ordinal, y define al conjunto de los números naturales denotado $\mathbb{N}$ algebrizado con las operaciones de adición y multiplicación. Consiste en

1. Términos primitivos
   a) Un elemento, que se denota con 0
   b) Un conjunto $\mathbb{N} \neq \emptyset$
   c) una función, llamada sucesor que se simboliza con s
2. Axiomas
   a) El número 0 es un número natural, es decir $0 \in \mathbb{N}$
   b) La función sucesor es una función inyectiva
   $$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$$
   Este axioma establece
   I) Todo elemento de $\mathbb{N}$ tiene un sucesor y sólo uno.
   II) El 0 no es sucesor de ningún elemento de $\mathbb{N}$
   III) Si dos elementos de $\mathbb{N}$ tienen el mismo sucesor, entonces son iguales.
   c) **Principio de inducción completa**. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y cumple $0 \in A$, y que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}\ (n \in A \ \Rightarrow\ s(n) \in A)$$
   entonces $\mathbb{N} \subseteq A$
3. Definiciones
   I) Adición: Sea $m \in \mathbb{N}$
      a) $m + 0 = m$
      b) $m + s(n) = s(m + n)$
   II) Multiplicación
      a) $m \cdot 0 = 0$
      b) $m \cdot s(n) = m + (m \cdot n)$
   III) Exponenciación
      a) $m^0 = 1$
      b) $m^{s(n)} = m^n \cdot m$

El sistem axiomático se completa con otras definiciones y teoremas.

Usando el principio de inducción con las operaciones y el orden en los naturales La idea es la siguiente:
Sea $P(x)$ un predicado y supongamos que cada vez que damos un número natural n, $P(n)$ resulta verdadera. A partir de este hecho si podemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera. Entonces tendríamos
Si $P(0)$ es verdadera, entonces $P(1)$ es verdadera.
Si $P(1)$ es verdadera, entonces $P(2)$ es verdadera.
Si $P(2)$ es verdadera, entonces $P(3)$ es verdadera etc.
Intuitivamente podríamos concluir que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
Principio de Inducción Completa Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$

b) $n \in A$ implica que $n+1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$

Lema 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $s(n) \neq n$.*

Demostración. Definimos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid s(n) \neq n\}$, entonces $A \subseteq \mathbb{N}$. Queremos demostrar que $A = \mathbb{N}$.

I) Veamos que $0 \in A$.
Por el axioma 2, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq 0$. En particular, $s(0) \neq 0$. Por tanto, $0 \in A$

II) Supongamos que $n \in A$, es decir, que $s(n) \neq n$

III) Se debe demostrar que $s(n) \in A$, es decir, $s(s(n)) \neq s(n)$.
Por el axioma 2, la función sucesor s es inyectiva, entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$, si $x \neq y$, $s(x) \neq s(y)$. Como, por la hipótesis de inducción, $s(n) \neq n$, tenemos que $s(s(n)) \neq s(n)$.
Por tanto, $s(n) \in A$.

Así, $0 \in A$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in A \ \Rightarrow\ s(n) \in A$ y por el axioma 2, $A = \mathbb{N}$ $\square$

Teorema 1. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n = 0$ o que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(m) = n$.*

Demostración. Definimos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0\ \vee\ \exists\ m \in \mathbb{N},\ s(m) = n\}$$

Queremos demostrar que $A = \mathbb{N}$

1. Por como definimos A, es claro que $0 \in A$

2. Supongamos que $n \in A$

3. Veamos que entonces $s(n) \in A$. Como $n \in A$, tenemos que $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$, a saber n mismo, tal que $s(m) = s(n)$, usando que s es una función.
Por ende, $0 \in A$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \in A \ \Rightarrow\ s(n) \in A$. De aquí por el axioma 2 $A = \mathbb{N}$. Así, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n = 0\ \vee\ \exists\ m \in \mathbb{N}\ s(m) = n$

$\square$

Teorema 2. ***Ley de la asociatividad de la suma.*** *Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$(a+b)+n = a+(b+n)$$

Demostración. Sean a y b cualesquiera naturales y sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (a+b)+n = a+(b+n)\}$$

1. Como $(a+b)+0 = a+b = a+(b+0)$, entonces $0 \in A$
2. Supongamos que $m \in A$. Así
$$(a+b)+m = a+(b+m)$$
3. Queremos demostrar que $s(m) \in A$, es decir, que
$$(a+b)+s(m) = a+(b+s(m))$$
Como
$$\begin{aligned}(a+b)+s(m) &= s((a+b)+m)\\ &= s(a+(b+m))\\ &= a+s(b+m)\\ &= a+(b+s(m))\end{aligned}$$
tenemos que $s(m) \in A$.
Concluimos por el principio de inducción que $A = \mathbb{N}$, por lo que tenemos que el teorema es cierto.

□

Teorema 3. ***Ley de la cancelación de la suma.*** *Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$a+n = b+n \;\Rightarrow\; a = b$$

Demostración. Sean a y b cualesquiera naturales y sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a+n = b+n \;\Rightarrow\; a = b\}$$

1. Supongamos que $a+0 = b+0$. Por la definición de la suma $a+0 = a$ y $b+0 = b$, así que $a = a+0 = b+0 = b$. Por lo tanto $a = b$ entonces $0 \in A$
2. Supongamos que $m \in A$. Así
$$a+m = b+m \;\Rightarrow\; a = b$$
3. Por la definición de la suma, sabemos que $a+s(m) = s(a+m)$ y que $b+s(m) = s(b+m)$, así que $s(a+m) = s(b+m)$. Como s es inyectiva por el axioma 2 de Peano, tenemos que $a+m = b+m$. Luego, por la hipótesis de inducción, podemos concluir que $a = b$. Por ende, $s(m) \in A$.

Así, por el principio de inducción, $A = \mathbb{N}$. □

Teorema 4. ***Propiedades de la suma.*** *Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$0 + n = n$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 + n = n\}$$

1. Como $0 + 0 = 0$, entonces $0 \in A$
2. Supongamos que $n \in A$. Así
$$0 + n = n$$
3. Queremos demostrar que $s(n) \in A$, es decir, que
$$0 + s(n) = s(n)$$
Como
$$\begin{aligned} 0 + s(n) &= s(0 + n) \\ &= s(n) \end{aligned}$$
tenemos que $s(n) \in A$.
Concluimos por el principio de inducción que $A = \mathbb{N}$.

□

Teorema 5. ***Propiedades de la suma.*** *Para cualesquiera $a, n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$a + s(n) = s(a) + n$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a + s(n) = s(a) + n\}$$

1. Como $a + s(0) = s(a + 0) = s(a) = s(a) + 0$, entonces $0 \in A$
2. Supongamos que $n \in A$. Así
$$a + s(n) = s(a) + n$$
3. Queremos demostrar que $s(n) \in A$, es decir, que
$$a + s(s(n)) = s(a) + s(n)$$
Como
$$\begin{aligned} a + s(s(n)) &= s(a + s(n)) \\ &= s(s(a) + n) \\ &= s(a) + s(n) \end{aligned}$$
tenemos que $s(n) \in A$.
Concluimos por el principio de inducción que $A = \mathbb{N}$.

□

Teorema 6. ***Ley de la conmutativa de la suma.*** *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$a + b = b + a$$

Demostración. Sean $a \in \mathbb{N}$ fijo y sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a + n = n + a\}$$

1. Como $a + 0 = a = 0 + a$, entonces $0 \in A$
2. Supongamos que $n \in A$. Así
$$a + n = n + a$$
3. Queremos demostrar que $s(n) \in A$, es decir, que
$$a + s(n) = s(n) + a$$
Como
$$\begin{aligned} s(n) + a &= s(n + a) \\ &= s(a + n) \\ &= a + s(n) \end{aligned}$$
tenemos que $s(n) \in A$.
Concluimos por el principio de inducción que $A = \mathbb{N}$.

□