Propiedades de la multiplicación de Números Naturales $\mathbb{N}$

Propiedades de la Multiplicación de números naturales Se tiene por definición

a) $m \cdot 0 = 0$

b) $m \cdot s(n) = m + (m \cdot n)$

Lema 1. *$\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene $1 \cdot n = n$*

Demostración. Definimos el conjunto A

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot n = n\}$$

a) Para ver que $0 \in A$ tenemos que por definición $1 \cdot 0 = 0$ por tanto $0 \in A$

b) Hipótesis de inducción: Supongamos que $n \in A$. Esto es $1 \cdot n = n$

c) Queremos ver que $s(n) \in A$. Para esto

$$1 \cdot s(n) = 1 + (1 \cdot n) = 1 + n = s(n)$$

por tanto $s(n) \in A$. Por tanto $A = \mathbb{N}$

□

Teorema 1. *(Ley de la distributividad) $\forall\ a, b, n \in \mathbb{N}$*

$$(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$$

Demostración. Tenemos que definir el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n\}$$

1. Para ver que $0 \in A$ tenemos

$$(a + b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$$

por tanto $0 \in A$

2. Ahora, supongamos que $n \in A$ esto es $(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$
3. A partir de ahi queremos ver que $s(n9 \in A$. Para esto se tiene

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot s(n) &= (a + b) + ((a + b) \cdot n)\\ &= (a + b) + (a \cdot n + b \cdot n)\\ &= (a + a \cdot n) + (b + b \cdot n)\\ &= a \cdot s(n) + b \cdot s(n)\end{aligned}$$

por tanto $s(n) \in A$ y $A = \mathbb{N}$

□

Hay ocasiones en las que dentro de una demostración por inducción se necesita hacer otra demostración por inducción, como sucede en la demostraci ón del siguiente teorema.

Teorema 2. *(Ley de la conmutatividad de la multiplicaci ́on). Tenemos que* $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot m = m \cdot n$$

Demostración. Definimos al conjunto A

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot m = m \cdot n\}$$

□

Demostración. Tenemos que

a) Para ver que $0 \in A$, debemos mostrar que $\forall\ m \in \mathbb{N}$ se cumple $m \cdot 0 = 0 \cdot m$ esto lo hacemos a su vez por inducción.
Sea

$$A' = \{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 0 = 0 \cdot m\}$$

   I) Para ver que $0 \in A'$ se tiene que $0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0$. Por lo tanto $0 \in A'$

   II) Supongamos que $n \in A'$ esto es $n \cdot 0 = 0 \cdot m$

   III) A partir de ahí queremos ver que $s(n) \in A'$. Para esto se tiene que

$$0 \cdot s(n) = 0 + (0 \cdot n) = 0 + (n \cdot 0) = 0 + 0 = 0 = s(n) \cdot 0$$

   por lo tanto $s(n) \in A'$ y $A' = \mathbb{N}$ y $\forall\ m \in \mathbb{N}$ se cumple $m \cdot 0 = 0 \cdot m$

   Así, tenemos que $0 \in A$ y hemos concluido el paso base para A.

b) Ahora supongamos que $n \in A$, es decir, $n \cdot m = m \cdot n$.

c) Queremos ver que $s(n) \in A$. Para esto se tiene

$$\begin{aligned} m \cdot s(n) &= m + (m \cdot n) \\ &= m + (n \cdot m) \\ &= (1 \cdot m) + (n \cdot m) \\ &= (1 + n) \cdot m \\ &= (n + 1) \cdot m \\ &= s(n) \cdot m \end{aligned}$$

   por lo tanto $s(n) \in A$ y $A = \mathbb{N}$

□

Teorema 3. *(Asociatividad del producto). $\forall\ a, b, n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$$

Demostración. Para esto definimos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)\}$$

y veamos

1. $0 \in A$ pues
$$(a \cdot b) \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0)$$

2. Supongamos que $n \in A$, esto es
$$(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$$

3. A partir de ahí queremos ver que $s(n) \in A$. Tenemos entonces
$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot s(n) &= (a \cdot b) \cdot (n + 1)\\ &= (a \cdot b) \cdot (1 + n)\\ &= (a \cdot b) \cdot 1 + (a \cdot b) \cdot n\\ &= a \cdot (b \cdot 1) + a \cdot (b \cdot n)\\ &= a \cdot (b \cdot 1 + b \cdot n)\\ &= (1 \cdot b + n \cdot b) \cdot a\\ &= ((1 + n) \cdot b) \cdot a\\ &= a \cdot ((n + 1) \cdot b)\\ &= a \cdot (b \cdot (n + 1))\\ &= a \cdot (b \cdot s(n))\end{aligned}$$

   por lo tanto $s(n) \in A$ y $A = \mathbb{N}$

□

Teorema 4. *(Ley de la cancelación para el producto). $\forall\ m, n, k \in \mathbb{N}$, si $k \neq 0$ y $m \cdot k = n \cdot k$ entonces $n = m$*

Demostración. Para esto definimos el conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{N} - \{0\} \mid m \cdot k = n \cdot k \ \Rightarrow\ n = m\}$$

y tenemos que

a) Para ver que $1 \in A$. Suponemos que $m \cdot 1 = n \cdot 1$, sabemos que $m \cdot 1 = m$ y $n \cdot 1 = n$ por tanto

$$m = m \cdot 1 = n \cdot 1 = n$$

por tanto $n = m$ y $1 \in A$

b) Suponemos que $k \in A$ es decir

$$m \cdot k = n \cdot k \ \Rightarrow \ n = m$$

c) A partir de ahí queremos ver que $s(k) \in A$. Para esto suponemos que $m \cdot s(k) = n \cdot s(k)$, de manera que

$$\begin{aligned} m \cdot s(k) = n \cdot s(k) \ &\Rightarrow \ m \cdot (k+1) = n \cdot (k+1) \\ &\Rightarrow \ mk + m = nk + n \\ &\overset{paso\ base\ n=m}{\Rightarrow} \ mk + n = nk + n \\ &\Rightarrow \ mk = nk \\ &\Rightarrow \ m = n \end{aligned}$$

Por lo que $s(n) \in A$ y $\mathbb{N} = A$

$\square$

Teorema 5. $\forall \ a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \vee \ b = 0$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot b = 0$ y sabemos que $a \cdot 0 = 0$ y $b \cdot 0 = 0$ y suponemos $a \neq 0$ y $b \neq 0$ por lo tanto

$$a \cdot b = 0 = a \cdot 0 \ \Rightarrow \ a \cdot b = a \cdot 0 \ \Rightarrow \ b = 0 \ \ (falso)$$

por tanto $a = 0 \ \vee \ b = 0$
Reciprocamente $a = 0 \ \vee \ b = 0$. Supongamos $a = 0$ y $b \neq 0$ por tanto

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

análgogamente si suponemos $a \neq 0$ y $b = 0$ se tiene

$$a \cdot b = a \cdot 0 = 0$$

$\square$