Propiedades de Números Naturales $\mathbb{N}$

Proposición 1. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$ *entonces* $m + n \in \mathbb{N}$

Demostración. Para esto definimos un conjunto A de la siguiente manera, tomando una $m \in \mathbb{N}$ fija

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$$

a) Para ver que $0 \in A$. Tenemos que si $m \in \mathbb{N}$ entonces $m + 0 = m \in \mathbb{N}$. Por tanto $0 \in A$

b) Supongamos que $n \in A$, esto es si $m \in \mathbb{N}$ entonces $n + m \in \mathbb{N}$

c) A partir de la suposición anterior, debemos probar que $s(n) \in A$. Para esto se tiene que

$$m + s(n) = s(m + n)$$

y como $m + n \in \mathbb{N}$ entonces $s(n + m) \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $s(n) \in A$ y entonces $A = \mathbb{N}$

□

Proposición 2. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$ *entonces* $m \cdot n \in \mathbb{N}$

Demostración. Para esto definimos un conjunto A de la siguiente manera, tomando una $m \in \mathbb{N}$ fija

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n \in \mathbb{N}\}$$

a) Para ver que $0 \in A$. Tenemos que si $m \in \mathbb{N}$ entonces $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$. Por tanto $0 \in A$

b) Supongamos que $n \in A$, esto es si $m \in \mathbb{N}$ entonces $n \cdot m \in \mathbb{N}$

c) A partir de la suposición anterior, debemos probar que $s(n) \in A$. Para esto se tiene que

$$m \cdot s(n) = m + m \cdot n$$

y como $m \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$ entonces $m + m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $s(n) \in A$ y entonces $A = \mathbb{N}$

□

Proposición 3. *El neutro aditivo y el neutro multiplicativo son únicos, es decir, 0 y 1 son los únicos números naturales que satisfacen para todo* $m \in \mathbb{N}$

a) $m + 0 = m$

b) $m \cdot 1 = m$

Demostración. Para el inciso (a). Supongamos que 0 y 0' son neutros aditivos es decir $\forall\, m \in \mathbb{N}$ se cumple $0 + m = 0$ y $0' + m = m$, entonces

$$0 \overset{0\ es\ neutro}{=} 0 + 0' \overset{0'\ es\ neutro}{=} 0'$$

Para el inciso (b). Supongamos que 1 y 1' son neutros multiplicativos es decir $\forall\, m \in \mathbb{N}$ se cumple $m \cdot 1 = m$ y $m \cdot 1' = m$, entonces

$$1 \overset{1'\ es\ neutro}{=} 1 \cdot 1' \overset{1\ es\ neutro}{=} 1'$$

□

Definición 1. *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$*. Diremos que* $m < n$ *si existe* $r \in \mathbb{N}$*,* $r \neq 0$ *tal que* $m + r = n$

Propiedades del orden en $\mathbb{N}$

1. Sean $n, m, r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tl que $m < n$, entonces $m + r < n + r$.

   Demostración.

$$\begin{aligned} m < n &\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ m + t = n \\ &\Rightarrow m + t + r = n + r \\ &\Rightarrow (m + t) + r = n + r \\ &\Rightarrow (m + r) + t = n + r \\ &\Rightarrow m + r < n + r \end{aligned}$$

   $\square$

2. Sean $m, n, r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $m < n$ y $r < s$, entonces $m + r < n + s$

$$\begin{aligned} m < n &\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ m + q = n \\ r < s &\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ r + t = n \end{aligned}$$

   Sumando las dos igualdades anteriores

$$(m + q) + (r + t) = n + r$$

   esto se puede escribir

$$(m + r) + (q + t) = n + r$$

   como $q + t \in \mathbb{N}$ entonces

$$m + r < n + r$$

3. Sean $m, n, r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $m < n$ y $r \neq 0$, entonces $m \cdot r < n \cdot r$

   Demostración.

$$\begin{aligned} m < n &\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ m + t = n \\ &\Rightarrow (m + t) \cdot r = n \cdot r \\ &\Rightarrow m \cdot r + t \cdot r = n \cdot r \\ &\Rightarrow m \cdot r < n \cdot r \end{aligned}$$

   $\square$

4. Sean $m, n, r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $m < n$ y $r < s$, entonces $m \cdot r < n \cdot s$

Demostración.

$$\begin{aligned} m < n \ &\Rightarrow \ \exists\, t \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ m + t = n \\ r < s \ &\Rightarrow \ \exists\, q \in \mathbb{N} - \{0\} \ \ni \ r + q = n \end{aligned}$$

Multiplicando las dos igualdades anteriores

$$(m + t) \cdot (r + q) = n \cdot s$$

esto se puede escribir

$$m \cdot r + (m \cdot q + t \cdot r + t \cdot q) = n \cdot s$$

como $m \cdot q + t \cdot r + t \cdot q \in \mathbb{N}$ entonces

$$m \cdot r < n \cdot s$$

□

5. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ 0 \leq n$

Demostración. Si $n = 0$ entonces $0 \leq n$.
Si $n \neq 0$ entonces al ser $0 + n = n$ por definición $0 < n$ □

6. $\forall\ n, k \in \mathbb{N}$ se cumple $n < n + k\ \ k \neq 0$

Demostración. Dado que $n + k = n + k$ entonces $n < n + k$ □