Propiedades de Números Naturales $\mathbb{N}$

Principio del Buen Orden Si A es un subconjunto de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.

Teorema 1. *El principio del buen orden implica el principio de inducción*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que
a) $0 \in A$
b) Si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$
Supongamos que $\mathbb{N} \neq A$

a) Consideremos el conjunto
$$B = \mathbb{N} \setminus A$$
el conjunto de números naturales que no están en A.

b) $B \neq \emptyset$. Si $A \neq \mathbb{N}$, entonces luego, por el Principio del Buen Orden, B tiene un elemento más pequeño, llamemosle n_0

c) Como $0 \in A$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $n_0 \neq 0$

d) Consideremos $n_0 - 1$ y tenemos que $n_0 - 1 \notin B$

e) Se debe tener $n_0 - 1 \in A$

f) Por hipótesis si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$ por lo que $n_0 - 1 + 1 \in A$ es decir $n_0 \in A$ (absurdo pues $n_0 \notin A$)

g) Debe ocurrir entonces $A = \mathbb{N}$

$\square$

Teorema 2. *El principio de inducción implica el principio del buen orden*

Demostración. Sea A un subconjunto de números naturales, y supongamos que A no tiene elemento mínimo

1. $0 \notin A$ pues en caso contrario 0 sería elemento mínimo
2. Consideremos el conjunto
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < a, \ \forall\, a \in A\}$$
3. $0 \in B$ pues $0 < a, \quad \forall\, a \in A$
4. Sea $n \in B$. Queremos ver que $n+1 \in B$
5. Supongamos que $n+1 \notin B$. Esto significa que $\exists\ a_0 \in A$ y $a_0 \leq n+1$
6. Por otro lado como $n < a \quad \forall\, a \in A$ entonces $n+1 \leq a_0\ \forall\, a \in A$

7. De lo anterior $a_0 = n+1$ y por lo tanto a_0 sería el elemento mínimo de A esto contradice la hipótesis de que A no tiene primer elemento luego $n + 1 \in B$

8. Como B satisface las hipótesis del principio de inducción entonces $B = \mathbb{N}$ lo cual es absurdo pues

$$\emptyset \neq A = A \cap \mathbb{N} = A \cap B = \emptyset$$

Se concluye entonce que A tiene elemento mínimo

$\square$

Ejercicio Demuestre usando el pricipio de inducción completa que

$$2^n > 2n + 1 \quad \forall \ \ n \geq 3$$

Solución Dado que $2^3 = 8 > 7 = 2(3) + 1$ entonces $p(3)$ es verdadera.
Supongo ahora $p(k)$ esto es $2^k > 2k + 1$ y tenemos que

$$\left\{\begin{matrix} 2^k > 2k+1 \\ 2^k > 2 \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow \ 2^k + 2^k > 2k + 1 + 2 \ \Rightarrow \ 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

esto es $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ para toda $k \geq 3$

Principio de inducción modificado Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$
b) $k \in A$ para todo $k = 0, 1, ..., n$ implican $n + 1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Teorema 3. *El principio de inducción completa es equivalente al principio de inducción modificado.*

Demostración. $\Rightarrow$ El principio de inducción completa implica el principio de inducción modificado.
Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$

b) Si $k \in A$ para todo $k = 0, 1, ..., n$ entonces $n + 1 \in A$.
Para demostrar que $A = \mathbb{N}$ veremos que A satisface las hipótesis del principio de inducción completa.

a) $0 \in A$

b) Supongamos que $n \in A$ y supongamos que

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n \ \ y \ \ k \notin A\} \neq \emptyset$$

Sea k_0 el mínimo de B, recuérdese que el principio de inducción completa es equivalente al axioma del buen orden. Entonces $k_0 \notin A$ y $k_0 \neq 0$ ya que $0 \in A$ y $0, 1, ..., k_0 - 1$ pertenecen a A, luego por hipótesis, $k_0 \in A$ lo que es una contradicción y por lo tanto debe ser $B = \emptyset$. Así que $0, 1, ..., n \in A$. Pero por hipótesis esto implica que $n + 1 \in A$. Entonces $A = \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ El principio de inducción modificado implica el principio de inducción completa.
Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n+1 \in A$.
   Para ver que $A = \mathbb{N}$ demostraremos que A satisface las hipótesis del principio de inducción modificado
   a) $0 \in A$
   b) Sea $k \in A$ para todo $k = 0, 1, ..., n$. En particular $n \in A$, así que por hipóetesis $n+1 \in A$.

   Por lo tanto $A = \mathbb{N}$

□

Definición 1. *Definimos a^n, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ como:*
(1) $a^1 = a$
(2) $\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad a^{k+1} = a^k a$

Teorema 4. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}\ a^m a^n = a^{n+m}$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad a^n a^1 = a^n a = a^{n+1} \ \Rightarrow\ p(1) \ \ es \ \ verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$a^n a^k = a^{n+k}$$

a partir de esto se tiene que

$$a^n a^k = a^{n+k} \ \Rightarrow\ a^n a^k a = a^{n+k} a \ \Rightarrow\ a^n a^{k+1} = a^{n+k+1}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow\ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 5. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}\ (a^m)^n = a^{nm}$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad (a^n)^1 = a^m = a^{n\cdot 1} \ \Rightarrow\ p(1) \ \ es \ \ verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$(a^n)^k = a^{n\cdot k}$$

a partir de esto se tiene que

$$(a^n)^k = a^{n\cdot k} \ \Rightarrow\ (a^n)^k a^n = a^{n\cdot k} a^n \ \Rightarrow\ (a^n)^{k+1} = a^{n\cdot k+n} = a^{n\cdot(k+1)}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow\ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 6. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}\ a^n b^n = (ab)^n$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad a^1 b^1 = ab = (ab)^1 \ \Rightarrow \ p(1) \ \ es \ \ verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$a^k b^k = (ab)^k$$

a partir de esto se tiene que

$$a^k b^k = (ab)^k \ \Rightarrow \ a^k b^k ab = (ab)^k ab \ \Rightarrow \ a^k a b^k b = (ab)^{k+1} \ \Rightarrow \ a^{k+1} b^{k+1} = (ab)^{k+1}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □