Propiedades de Números Naturales $\mathbb{N}$

Definición 1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Al único número natural r tal que satisface $m + r = n$ lo llamaremos la diferencia de n y m y lo denotaremos por $n - m$.*

Debe quedar claro que la diferencia $n-m$ sólo esta definida en $\mathbb{N}$ cuando $m \leq n$. Además por la definición de n-m se tiene que $n - m \leq n$, ya que $m + (n - m) = n$.

Proposición 1. *Sean $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$ y $s \leq r$. Entonces*

1. $n - n = 0$ *y* $n - 0 = n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$
2. $(s + m) + (n - m) = s + n$
3. $(n + r) - (m + s) = (n - m) + (r - s)$
4. *Si* $r \leq n - m$*, entonces* $(n - m) - r = n - (m + r)$
5. *Si* $r \leq m$*, entonces* $n - (m - r) = (n - m) + r$
6. $n \cdot (r - s) = n \cdot r - n \cdot s$
7. $(n - m) \cdot (r - s) = (n \cdot r + m \cdot s) - (n \cdot s + m \cdot r)$

Demostración. Para probar las igualdades usaremos la unicidad de $n-m$, es decir, si $m+t = n$, entonces $t = n - m$

1. $n \leq n$ implica, por definición, que $n + (n - n) = n = n + 0$, y de aquí obtenemos que $n - n = 0$. Igualmente $0 + (n - 0) = n = 0 + n$. Etonces $n - 0 = n$.
2. $m \leq n$ implica que $m + (n - m) = n$. Entonces
$$(s + m) + (n - m) = s + [m + (n - m)] = s + m$$
3. $m \leq n$ y $s \leq r$ implican $m + s \leq n + r$
$$\begin{aligned}(m + s) + [(n + r) - (m + s)] &= n + r \\ &= (s + n) + (r - s) \\ &= [(s + m) + (n - m)] + (r - s) \\ &= (m + s) + [(n - m) + (r - s)]\end{aligned}$$
Cancelando $m + s$ obtenemos
$$(n + r) - (m + s) = (n - m) + (r - s)$$
4. Si $r \leq n - m$, entonces sumando m en ambos lados de la desigualdad, tenemos, que
$$m + r \leq m + (n - m) = n$$

Así que está definido $n-(m+r)$. Entonces

$$\begin{aligned}(m+r)+[n-(m+r)] &= n\\ &= m+(n-m)\\ &= (m+r)+[(n-m)-r]\end{aligned}$$

Cancelando $m+r$ obtenemos

$$n-(m+r)=(n-m)-r$$

5. Si $r\leq m$, entonces $r\leq n$ y además $m-r\leq m\leq n$, por lo que están definidos $n-r$ y $n-(m-r)$. Entonces

$$\begin{aligned}(m-r)+[n-(m-r)] &= n\\ &= r+(n-r)\\ &= [(n-r)+(m-m)]+r\\ &= [(m+n)-(r+m)]+r\\ &= [(m-r)+(n-m)]+r\\ &= (m-r)+[(n-m)+r]\end{aligned}$$

Cancelando $m-r$ a ambos lados tenemos entonces que

$$n-(m-r)=(n-m)+r$$

6. $s+(r-s)=r$ por definición de $r-s$ y $n\cdot[s+(r-s)]=n\cdot r$

$$\begin{aligned}n\cdot s+n\cdot(r-s) &= n[s+(r-s)]\\ &= n\cdot r\\ &= n\cdot s+(n\cdot r-n\cdot s)\end{aligned}$$

Cancelando $n\cdot s$, tenemos que

$$n\cdot(r-s)=n\cdot r-n\cdot s$$

7. Demostraremos que $(n-m)\cdot(r-s)+(n\cdot s+m\cdot r)=n\cdot r+m\cdot s$ que es equivalente a

$$(n-m)\cdot(r-s)=(n\cdot r+m\cdot s)-(n\cdot s+m\cdot r)$$

$$\begin{aligned}(n-m)\cdot(r-s)+(n\cdot s+m\cdot r) &= n\cdot(r-s)-m\cdot(r-s)+(ns+mr)\\ &= (nr-ns)-(mr-ms)+(ns+mr)\\ &= [(nr-ns)+ns-(mr-ms)]+mr\\ &= [nr-(mr-ms)]+mr\\ &= (nr+mr)-(mr-ms)\\ &= [(nr+mr)-mr]+ms\\ &= nr+ms\end{aligned}$$

□