## Ordenaciones con repetición

Para motivar los siguientes conceptos combinatorios, veamos el siguiente ejemplo

**Ejemplo** ¿Cuántas posibilidades de placas de auto pueden ser expedidas en el Distrito Federal? Las placas del Distrito Federal son formadas con tres dígitos (estos son 10 distintos) seguidos de tres letras (para las placas se consideran 26 letras).
Intuitivamente vemos que podemos representar una placa mediante una tabla con 6 casillas, las primeras tres corresponden a un dígito, y las úlitmas tres, a una letra.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|

En la primera casilla tenemos posibilidad de elegir entre 10 dígitos $\{0, 1, 2..., 9\}$, al igual que en la segunda y tercera casillas. En las úlitmas tres casillas tenemos posibilidad de elegir entre 26 letras $\{A, B, ..., Y, Z\}$. Entonces si denotamos con A al conjunto $\{0, 1, 2..., 9\}$ y con B al conjunto $\{A, B, ..., Y, Z\}$, estamos buscando la cardinalidad del conjunto $A \times A \times A \times B \times B \times B$. Por el Principio del producto,

$$card(A \times A \times A \times B \times B \times B) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17,576,000.$$

Así, hay $17,576,000$ placas distintas que pueden ser expedidas en el distrito federal.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 26 | 26 | 26 |

**Ejemplo** ¿cuántas posibilidades de placas de auto pueden ser expedidas en el Distrito Federal que no comiencen con el dígito 0 y que no tengan la letra O?.
Trabajando de forma similar a como hicimos para contestar la pregunta anterior, podemos decir que en la primera casilla tenemos la posibilidad de elegir entre 9 dígitos $\{1, 2, ..., 9\}$ (pues no queremos contar las placas que empiezan con 0), en la segunda y tercera casillas tenemos la posibilidad de elegir entre 10 dígitos $\{0, 1, ..., 9\}$, y en las últimas tres casillas tenemos la posibilidad de elegir entre 25 letras $\{A, B, ..., M, N, P, Q, ..., Y, Z\}$ (pues en ninguna queremos que aparezca la letra O). Así, si denotamos con A al conjunto $\{0, 1, 2..., 9\}$, con B al conjunto $\{A, B, ..., M, N, P, Q, ..., Y, Z\}$, y con C al conjunto $\{0, 1, ..., 9\}$ estamos buscando la cardinalidad del conjunto $C \times A \times A \times B \times B \times B$. Por el Principio del producto,

$$card(C \times A \times A \times B \times B \times B) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 14,062,500.$$

Así, hay $14,062,500$ placas distintas que pueden ser expedidas en el distrito federal que no empiecen con el número 0 y en las que no aparezca la letra O.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 10 | 25 | 25 | 25 |

**Definición 1.** *Sean $n, m$
$mathbbN$ y sea $A$ un conjunto con $n$ elementos. Las* ***ordenaciones con repetición*** *de los elementos de $A$ tomados de $m$ en $m$ son las funciones $f : I_m \to A$. Denotamos*

$$OR_n^m$$

*al número de ordenaciones con repetición de un conjunto $A$ con $n$ elementos tomados de $m$ en $m$. En otras palabras*

$$OR_n^m = card(^{I_m}A)$$

**Teorema 1.** *Para cualesquiera n y m,*

$$OR_n^m = n^m$$

*Demostración.* Sea A un conjunto con n elementos. Por definición, $OR_m^m$ es el número de ordenaciones con repetición de un conjunto A con n elementos tomados de m en m, es decir, el número de funciones de $I_m$ en A. Por el principio de exponenciación, tenemos que

$$card(^{I_m}A) = [card(A)]^{card(I_m)} = n^m$$

□

**Ejemplo** En el Ejemplo anterior vimos que hay $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26$ posibles placas en el Distrito Federal. Otra manera de ver este resultado es dividir en dos las placas, considerando primero las tres primeras casillas en donde aparecen dígitos y, en segundo lugar, las otras tres casillas en donde aparecen las letras. Así, podemos decir que las posibilidades de la primera parte de las placas son las funciones de 10 dígitos tomados de 3 en 3, y ver que para la primera pare de las placas hay $OR_{10}^3 = 10^3$ posibilidades.
Por otro lado, las posibilidades para la segunda parte de las placas son las ordenaciones con repetición de 26 letras tomadas de 3 en 3, por lo que hay $OR_{26}^3 = 26^3$ Entonces por el Principio del producto, podemos concluir que hay $OR_{10}^3 \cdot OR_{26}^3 = 10^3 \cdot 26^3$ posibles placas en el Distrito Federal.

## Ordenaciones sin repetición

Para motivar las ordenaciones (sin repetición), veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo** ¿Cuáles son las palabras de dos letras distintas que se pueden formar con las letras a, e, y i?
Podemos ver que son las siguientes:

$$\begin{matrix} ae & ai \\ ea & ei \\ ia & ie \end{matrix}$$

Podemos ver a estas palabras como funciones de $I_2$ en $\{a, e, i\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & e \end{pmatrix}$$

Observe que como formamos palabras con letras distintas, estas funciones son inyectivas.

**Definición 2.** *Sea A un conjunto finito con n elementos. las ordenaciones de los elementos de A tomados de m en m son las funciones $f : I_m \to A$ tales que f es inyectiva. Denotamos con $O_n^m$ al número de ordenaciones de un conjunto A con n elementos tomados de m en m*

Suponemos que A es distinto del vacío, pues si $A = \emptyset$, siempre que $m \geq 1$ no habría ninguna función $f : I_m \to A$. Además, si A tiene n elementos, para que existan funciones inyectivas de $f : I_n \leftrightarrow A$ se necesita que $m \leq n$. Por lo tanto, las ordenaciones sólo existen cuando el número de elementos del conjunto es mayor o igual que el tama˜no de las ordenaciones. Entonces las ordenaciones son casos especiales de las ordenaciones con repetición. Para encontrar una fórmula para las ordenaciones haremos uso de lo siguiente: para cualesquiera $m, n\mathbb{N}^+$ tales que $m \leq n$.

$$O_n^{m+1} = (n-m)O_n^m$$

Para demostrarlo, primero veamos un ejemplo

**Ejemplo** Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Las funciones inyectivas de $I_1$ en A son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$$

Entonces $O_5^1 = 5$. Tomemos una en particular, digamos $f = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$, ¿cuántas funciones inyectivas hay de $I_2$ en A que extiendan a f?. Esta extensión tienel la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & x \end{pmatrix}$$

donde x es cualquier elemento de A que no sea b para que esta extensión siga siendo inyectiva. Hay $5-1=4$ posibles elementos de A que pueden ser x, por lo que por cada función inyectiva de $I_1$ en A, hay 4 funciones inyectivas que la extienden de $I_2$ en A.
Así, hay 5(4) funciones inyectivas de $I_2$ en A.

**Lema 1.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}^+$ tales que $m \leq n$. Entonces*

$$O_n^{m+1} = (n-m)O_n^m$$

*Demostración.* Sea A un conjunto con n elementos. Consideremos una función inyectiva $F : I_{m+1} \to A$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(m) & F(m+1) \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(m) \end{pmatrix}$$

es una función inyectiva de $I_m$ en A y $F(m+1) \in A - \{F(1), F(2), ..., F(m)\}$ ya que F es inyectiva. A la inversa, si

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(m) \end{pmatrix}$$

es una función inyectiva de $I_m$ en A y $b \in A - \{f(1), f(2), ..., f(m)\}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(m) & b \end{pmatrix}$$

es una función inyectiva de $I_{m+1}$ en A.
Sean $f_1, f_2, ..., f_k$ las funciones inyectivas de $I_m$ en A, donde $k = O_n^m$. Definamos para cada $i \in I_k$, el conjunto

$$B_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 \\ f_i(1) & f_i(2) & \cdots & f_i(m) & b \end{pmatrix} \mid b \in A - \{f_i(1), f_i(2), ..., f_i(m)\} \right\}$$

Entonces el conjunto de funciones inyectivas de $I_{m+1}$ en A, que denotaremos por B, se puede escribir como

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdot \cup B_k$$

Dado que los conjuntos $B_1, ..., B_k$ son conjuntos finitos ajenos por pares, tenemos que

$$card(B) = card\,(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdot \cup B_k) = card(B_1) + \cdots + card(B_k)$$

Además, para cada $i \in I_k$ se tiene que

$$card(B_i) = card(A - \{f_i(1), f_i(2), ..., f_i(m)\}) = n - m$$

Concluimos que

$$O_n^{m+1} = card(B) = (n-m)k = (n-m)O_n^m$$

□

Ahora sí podemos dar una fórmula para calcular el número de ordenaciones de un conjunto A con n elementos tomados de m en m.

**Teorema 2.** *Si $n, m \in \mathbb{N}^+$ y $m \leq n$, entonces*

$$O_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

*Demostración.* La harempos por inducción sobre m.

a) Si $m = 1$, entonces $n \geq 1$. Dado que hay n funciones inyectivas distintas de $I_1$, en un conjunto A con n elementos, $O_n^1 = n$. Por otro lado, como $m = 1$, $n(n-1)\cdots(n-m+1) = n$. Así, en este caso, efectivamente, $O_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

b) Supongamos que $O_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

c) Entonces por el lema anterior, $O_n^{m+1} = (n-m)O_n^m = O_n^m(n-m)$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos que

$$O_n^m(n-m) = n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)$$

Entonces

$$\begin{aligned} O_n^{m+1} &= n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m) \\ &= n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-(m+1)+1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $O_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$ siempre que $m, n \in \mathbb{N}^+$ y $m \leq n$ □

Por otro lado se tiene

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

## Permutaciones

Un caso especial de ordenaciones es el de las permutaciones.

**Definición 3.** *A las ordenaciones de un conjuntos con $n$ elementos tomados de $n$ en $n$ se les llama permutaciones de $n$ elementos. Denotamos con $P_n$ al número de permutaciones de $n$ elementos.*

**Corolario 1.** *Si $n \in \mathbb{N}$, $P_n = n!$*

*Demostración.* Si $n \in \mathbb{N}^+$, como por su definición $P_n = O_n^n$, por el teorema anterior,

$$O_n^n = n(n-1)\cdots(n-n+1)$$

Así,

$$P_n = n(n-1)\cdots(2)(1) = n!$$

Concluimos que $P_n = n!$ □

Otra definición de permutaciones

**Definición 4.** *Sea $A$ un conjunto finito. Las permutaciones del conjunto $A$ son las funciones biyectivas de $A$ en $A$.*

**Ejemplo** Supongamos que hay cuatro personas que se sentarán en una mesa con cuatro lugares. Digamos que las personas son Adela, Berenice, Carlos y Diego. Entonces existen $4! = 24$ maneras distintas de sentar a la mesa a las cuatro personas. Si vemos estas maneras como las ordenaciones del conjunto $\{A, B, C, D\}$ tomadas de 4 en 4, podemos representar algunas de ellas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & C & B & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$

Las funciones biyectivas que les corresponden según la equivalencia que veremos son:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$$

Podemos pensar en estas últimas permutaciones como que les ponemos a los lugares en la mesa nombres fijos A, B, C y D y vamos permutando a las personas en esos lugares. Observe que las permutaciones asociadas tienen el mismo segundo renglón, que es el que corresponde a la imagen de las funciones, dando la idea de por qué ambas definiciones de permutación son equivalentes.

**Ejemplo** Se quieren colocar 10 libros en un estantes, de los cuales 4 son novelas, 3 son ensayos, 3 son de poemas y 1 es de cuentos. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si se quiere que los libros del mismo tipo queden juntos?

Por el Principio del producto, hay $P_4P_3P_3P_1$ arreglos de los libros de manera que las novelas queden primero, los ensayos segundo, los de poemas tercero y el de cuentos al final. Similarmente para cada posible arreglo de los tipos de libros, hay $P_4P_3P_3P_1$ arrelos. Entonces, como hay $P_4$ posibles órdenes de los tipos de libros, por el Principio del Producto hay $(P_4)P_4P_3P_3P_1 = 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1! = 20736$ maneras de acomodar los libros en el estante de manera que los libros de un mismo tipo queden juntos.