Conjunto Potencia

Definición 1. *El conjunto potencia de un conjunto A, denotado $P(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Se escribe*

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Nótese que todos los elementos de $P(X)$ son conjuntos.

Ejemplo $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Ejemplo Si $X = \{a\}$, $P(X) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, X\}$

Ejemplo Si $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{a, b\}, X\}$

Como para cada subconjunto X, $\emptyset \subseteq X$, entonces $P(X) \neq \emptyset$ tendrá por lo menos dos lelentos que son $\emptyset$ y X

Teorema 1. *Para cualesquiera conjuntos A y B*

$$P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} X \in P(A) \cup P(B) &\Rightarrow X \subseteq A \ \vee \ X \subseteq B \\ &\Rightarrow \ X \subseteq A \cup B \\ &\Rightarrow \ X \in P(A \cup B) \end{aligned}$$

□

Ejemplo La otra inclusión no se cumple siempre, veamos un ejemplo. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ tenemos entonces

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Por otro lado

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

de manera que

$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

observamos que

$$\{1, 2, 3, 4\} \subset P(A \cup B) \ \ y \ \ \{1, 2, 3, 4\} \nsubseteq P(A) \ \wedge \ \{1, 2, 3, 4\} \nsubseteq P(B)$$

por lo tanto

$$P(A \cup B) \nsubseteq P(A) \cup P(B)$$

Teorema 2. *Para cualesquiera conjuntos A y B*

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} X \in P(A) \cap P(B) &\Leftrightarrow X \in P(A) \ \wedge \ X \in P(B) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \ \wedge \ X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \ \cap B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq P(A \cap B) \end{aligned}$$

$\square$

Pareja ordenada

Un concepto importante en la teoría de conjuntos es el de pareja ordenada que consiste de una pareja de objetos de los cuales debe quedar claro quién va en primer lugar y quién en segundo. Se denotará a la pareja ordenada de los objetos a y b por (a, b) y se deberá definir que satisfaga:

$$(a, b) = (c, d) \ \Leftrightarrow \ a = c \ \ y \ \ b = d \tag{1}$$

Durante varios años se buscó una definición conjuntista de par ordenado, con el único propósito de que se verificara (1), quedando así incluido este concepto en la teoría de conjuntos. Alrededor de los años 30's del siglo XX, Kuratowski y Winner introdujeron la definición conjuntista de par ordenado.

Definición 2. *El par ordenado de a y b es el conjunto*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Ejemplo Tenemos que

$$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

Si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. Por ejemplo

$$(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \ \ y \ \ (2, 1) = \{\{2\}, \{2, 1\}\}$$

Veamos que con esta definición se satisface (1)

Teorema 3.

$$(a, b) = (c, d) \ \Leftrightarrow \ a = c \ \ y \ \ b = d$$

Demostración. $\Rightarrow$.
Supongamos que $(a, b) = (c, d)$ y consideramos por separado los dos casos posibles $a = b$ o $a \neq b$

a) $a = b$ en este caso

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Como $\{\{a\}\}$ tiene un único elemento, entonces $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ debe tener un único elemento, lo que significa que debe ser $\{c\} = \{c, d\}$ y nuevamente, como $\{c\}$ tiene un único elemento y por lo tanto se debe tener $c = d$. Entonces $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$ implica $\{a\} = \{c\}$ que a su vez implica $a = c$. En este caso se tiene entonces que $a = b = c = d$

b) $a \neq b$.
Como $\{a,b\} \in (a,b)$ y $(a,b) = (c,d)$ por hipótesis, entonces $\{a,b\} \in (c,d)$, por lo que $\{a,b\} = \{c\}$ o $\{a,b\} = \{c,d\}$. El primer caso no puede suceder por que eso implicaría que $a = b$, que no es el caso. Entonces $\{a,b\} = \{c,d\}$, lo que implica forzosamente que $c \neq d$, pues en caso contrario se llegaría nuevamente a que $a = b$. Por otro lado como $\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$, entonces $\{a\} = \{c\}$, pues ya hemos visto que $c \neq d$. Por lo tanto $a = c$. Por último, ya que $\{a,b\} = \{c,d\}$, $a \neq b$ y $a = c$, entonces $b = d$.
$\Leftarrow$. Es inmediato

$\square$

Producto cartesiano

Definición 3. *Sean A y B conjuntos. El producto cartsiano de A y B denotado $A \times B$ es el conjunto*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Dada una pareja ordenada (a,b), para que sea elemento de $A \times B$, se debe tener, por definición, que $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$(a,b) \in A \times B \overset{def}{\Leftrightarrow} (a \in A \ \wedge \ b \in B)$$

Si una pareja ordenada (c,d) no pertenece a $A \times B$ significa que no se cumplen al mismo tiempo las dos propiedades $c \in A$ y $d \in B$, lo que significa que se debe tener que $c \notin A$ o $d \notin B$. Entonces

$$(c,d) \notin A \times B \ \Leftrightarrow \ (c \notin A \ \vee \ d \notin B)$$

Ejemplo Si $A = \{a,b\}$ y $B = \{1,a\}$, entonces

$$A \times B = \{(a,1),(b,1),(a,a),(b,a)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(a,a),(a,b)\}$$

Teorema 4. *Sean A,B,C y D conjuntos no vacíos tales que $A \times B = C \times D$. Entonces $A = C$ y $B = D$*

Demostración. Sean $a \in A$ y $b \in B$ arbitrarios. Entonces $(a,b) \in A \times B$ y como $A \times B = C \times D$, entonces $(a,b) \in C \times D$ lo que significa que $a \in C$ y $b \in D$. Luego $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$. De manera análoga se demuestra que $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Y con esto se tiene $A = C$ y $B = D$ $\square$

Operaciones entre conjuntos generalizadas

Dados los conjuntos A, B *y* C, podemos deducir que $A \cap B \cap C$ es el siguiente conjunto

$$\{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$$

Si renombramos a los conjuntos A, B *y* C como A_1, A_2, A_3, se puede verificar que entonces

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x \mid \forall \ i \ \in \{1,2,3\}, x \in A_i\}$$

Así, podemos generalizar la operación intersección de la siguiente manera: si I es, por ejemplo, el conjunto $\{1,2,...,n\}$ y cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i, entonces

$$A_1 \cap ... \cap A_n = \{x \mid \forall \ i \ \in I, x \in A_i\}$$

Definición 4. *Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i su conjunto. Definimos la intersección del conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$, denotada como*

$$\bigcap\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

de la siguiente forma

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall\ i \in I,\ x \in A_i\}$$

Ejemplo Teneoms que

$$\bigcap\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1]$$

Dados los conjuntos A, B y C, podemos deducir que $A \cup B \cup C$ es el siguiente conjunto

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

Si renombramos a los conjuntos A, B y C como A_1, A_2, A_3, se puede verificar que entonces

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x \mid \exists\ i\ \in \{1,2,3\}, x \in A_i\}$$

Así, podemos generalizar la operación unión de la siguiente manera: si I es, por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i, entonces

$$A_1 \cup ... \cup A_n = \{x \mid \exists\ i\ \in I, x \in A_i\}$$

Definición 5. *Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i su conjunto. Definimos la unión del conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$, denotada como*

$$\bigcup\{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i\in I} A_i$$

de la siguiente forma

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists\ i \in I,\ x \in A_i\}$$

Ejemplo Teneoms que

$$\bigcup\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = (-1,2)$$

Teorema 5. *Álgebra de conjuntos generalizada. Dada el conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$ y un conjunto B cualquiera se tiene*

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

3. $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$

4. $B \cap \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$

5. $B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$

6. $B - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$

Demostración. 1. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\ \forall\ i \in I,\ x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \in I,\ x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\ \exists\ i \in I,\ x \in A_i \\ &\Leftrightarrow \forall\ i \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall\ i \in I,\ x \in A_i^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) &\Leftrightarrow x \in B \ \lor \ x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \lor \ \forall \, i \in I, \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \forall \, i \in I, \ x \in B \ \lor \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \forall \, i \in I, \ x \in B \cup A_i \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)
\end{aligned}$$

4. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &\Leftrightarrow x \in B \ \land \ x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \land \ \exists \, i \in I, \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \exists \, i \in I, \ x \in B \ \land \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow \exists \, i \in I, \ x \in B \cap A_i \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)
\end{aligned}$$

5. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in B - \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) &\Leftrightarrow x \in B \ \land \ x \notin \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \land \ \neg \, \forall \, i \in I, \ x \in A_i \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \land \ \exists \, i \in I, \ x \notin A_i \\
&\Leftrightarrow x \in B \ \land \ \exists \, i \in I, \ x \in A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists \, i \in I, \ x \in B \land A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists \, i \in I, \ x \in B \cap A_i^c \\
&\Leftrightarrow \exists \, i \in I, \ x \in B - A_i \\
&\Leftrightarrow \ x \in \bigcup_{i \in I} (B - A_i)
\end{aligned}$$

$\square$