Relaciones binarias

Definición 1. *Una relacióón binaria R de A en B es un subconjunto de $A \times B$ de parejas ordenadas.*

Por tanto si R es una relación binaria entre A y B, R es un conjunto de pares ordenados cuyas primeras coordenadas son elementos de A y las segundas coordenadas son elementos de B. Así, para indicar que un par ordenado pertenece a la relación suele escribirse

$$(a, b) \in R \quad o \quad a\ R\ b$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relacion

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 3), (0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\}$$

por lo que

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relacion

$$S = \left\{(b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$B \times C = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{5}{2}\right), (1, 0), \left(3, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right), (3, 0)\right\}$$

por lo que

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

Definición 2. *El dominio de una relación $R \subseteq A \times B$, denotado $dom(R)$, es el conjunto de elementos $x \in A$ que estan relacionados con algún $y \in B$, es decir*

$$dom(R) = \{x \in A \mid \exists\ b \in B,\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$$

$$dom(R) = \{x \in A \mid \exists\ b\ (b \in b\ \wedge\ (a, b) \in R)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relacion

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$dom(R) = \{-1, 1\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relacion

$$S = \left\{(b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

y entonces

$$dom(S) = \{1, 3\}$$

Definición 3. *La imagen o rango de una relación $R \subseteq A \times B$, denotado $im(R)$, es el conjunto de elementos $b \in B$ que estan relacionados con algún $a \in A$, es decir*

$$im(R) = \{b \in B \mid \exists\ a \in A,\ tal\ que\ (a, b) \in R\}$$

$$im(R) = \{b \in B \mid \exists\ a\ (a \in A\ \wedge\ (a, b) \in R)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relacion

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$im(R) = \{1\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relacion

$$S = \left\{(b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

y entonces

$$im(S) = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

Lema 1. *Si R es una relación binaria, entonces $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es una relación binaria*

Demostración. Dado $(a, b) \in R$, tenemos que (b, a) es un par ordenado. Así $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es un conjunto de pares ordenados, por lo que $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ es una relación binaria □

Definición 4. *La relación inversa R^{-1} de una relación R, es una relación definida como*

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{1, 3\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$ descritos en la relacion

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

y entonces

$$R^{-1} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$B = \{1, 3\} \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $B \times C$ descritos en la relacion

$$S = \left\{(b, c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

y entonces

$$S^{-1} = \left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right)\right\}$$

Existe una manera de combinar dos relaciones para formar una nueva relación, según la siguiente definición

Definición 5. *Sean R y S relaciones binarias. La relación composición de R con S, denotada $S \circ R$, es el conjunto*

$$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists\, b\ ((a,b) \in R\ \wedge\ (b,c) \in S)\}$$

Ejemplo Dados los conjuntos

$$A = \{-1,0,1\}, \quad B = \{1,3\}, \quad C = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

Hallar los elementos de $A \times B$, $B \times C$ descritos en la relaciones R, S y $S \circ R$

$$R = \{(a,b) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

$$S = \left\{(b,c) \in B \times C \mid c = \frac{b}{2} + 1\right\}$$

Solución En este caso

$$R = \{(-1,1),(1,1)\}$$

$$S = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

Ahora bien se tiene que

$$S \circ R = \left\{\left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right)\right\}$$

Proposición 1. *Si R y S son relaciones binarias, entonces*

$$S \circ R \subseteq dom(R) \times im(S)$$

Demostración. Sea $(a,c) \in S \circ R$, entonces existe $b \in im(R)$ de forma que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in S$. De aquí que $a \in dom(R)$ y $c \in im(S)$. Por lo tanto, $(a,c) \in dom(R) \times im(S)$ y $S \circ R \subseteq dom(R) \times im(S)$ □

Teorema 1. *Sean R, S relaciones binarias. Entonces se tiene*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(a,c) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow\ (c,a) \in (S \circ R) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, b\ ((c,b) \in R\ \wedge\ (b,a) \in S) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, b\ ((b,c) \in R^{-1}\ \wedge\ (a,b) \in S^{-1}) \\
&\Leftrightarrow\ \exists\, b\ ((a,b) \in S^{-1}\ \wedge\ (b,c) \in R^{-1}) \\
&\Leftrightarrow\ (a,c) \in R^{-1} \circ S^{-1}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Sean T, S y R relaciones binarias. Entonces se tiene lo siguiente:*

a) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Demostración. Tenemos que

a) Para $(T \circ S) \circ R$ se tiene

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (T \circ S) \circ R &\Leftrightarrow (\exists y' \wedge (x,y') \in S \circ R \wedge (y',z) \in T) \\
&\Leftrightarrow (\exists y' \wedge (\exists y \wedge (x,y) \in R \wedge (y,y') \in S) \wedge (y',z) \in T) \\
&\Leftrightarrow ((\exists y' \wedge \exists y \wedge (x,y) \in R) \wedge (y,y') \in S \wedge (y',z) \in T) \\
&\Leftrightarrow ((\exists y \wedge (x,y) \in R \wedge \exists y') \wedge (y,y') \in S \wedge (y',z) \in T) \\
&\Leftrightarrow (\exists y \wedge (x,y) \in R \wedge (\exists y' \wedge (y,y') \in S) \wedge (y',z) \in T) \\
&\Leftrightarrow (\exists y \wedge (x,y) \in R \wedge (y,z) \in T \circ S) \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in (T \circ S) \circ R
\end{aligned}$$

b) En este caso

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (z,x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \exists \wedge (z,y) \in R \wedge (y,x) \in S \\
&\Leftrightarrow \exists y \wedge (y,z) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow \exists y \wedge (x,y) \in S^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in R^{-1} \circ S^{-1}
\end{aligned}$$

□