Relaciones de equivalencia

Definición 1. *Sea A un conjunto cualquiera. Una relación binaria R es* ***reflexiva*** *sobre A si y sólo si*

$$\forall\ a \in A,\ \ (a,a) \in R$$

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
En este caso se cumple $\forall\ a \in A,\ (a,a) \in R$ y por tanto R es reflexiva.

Definición 2. *Sea A un conjunto cualquiera. Una relación binaria R es* ***antirreflexiva*** *sobre A si y sólo si*

$$\forall\ a \in A,\ \ (a,a) \notin R$$

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{a,b\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(a,b),(b,a)\}$.
En este caso se cumple $\forall\ a \in A,\ (a,a) \notin R$ y por tanto R es reflexiva.

Definición 3. *Sea A un conjunto cualquiera. Una relación binaria R es* ***simétrica*** *sobre A si y sólo si*

$$\forall\ (a,b) \in R,\ \ se\ tiene\ (b,a) \in R$$

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$.
En este caso no se cumple $\forall\ (a,b) \in R,\ (b,a) \in R$ y por tanto R es no es simétrica.

Definición 4. *Sea A un conjunto cualquiera. Una relación binaria R es* ***antisimétrica*** *sobre A si y sólo si*

$$\forall\ (a,b) \in R,\ \ se\ tiene\ (b,a) \in R\ y\ además\ b = a$$

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$.
En este caso no se cumple $\forall\ (a,b) \in R,\ (b,a) \in R$ y por tanto R es no es simétrica.
R es antisimétrica pues los únicos pares ordenados tales como $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ son los que $a = b$

Definición 5. *Sea A un conjunto cualquiera. Una relación binaria R es* ***transitiva*** *sobre A si y sólo si siempre que $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.*

Obs. Una relación binaria R no es transitiva si y sólo si existen a,b,c tales que $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ pero $(a,c) \notin R$

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$.
En este caso se cumple

$$\begin{aligned}
&(1,1) \in R\ \ y\ \ (1,1) \in R\ \ y\ \ (1,1) \in R\\
&(2,2) \in R\ \ y\ \ (2,2) \in R\ \ y\ \ (2,2) \in R\\
&(3,3) \in R\ \ y\ \ (3,3) \in R\ \ y\ \ (3,3) \in R\\
&(2,2) \in R\ \ y\ \ (2,3) \in R\ \ y\ \ (2,3) \in R
\end{aligned}$$

Ejemplo Sea $S = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ tenemos que S no es transitiva, pues $(2,3) \in S$ y $(3,2) \in S$ pero $(2,2) \notin S$

Definición 6. *Una relación R sobre un conjunto A se llama **relación de equivalencia** si satisface*

I) $(a, a) \in R \ \forall \ a \in A$ ***reflexividad***

II) *Si* $(a, b) \in R$ *entonces* $(b, a) \in R$ ***simetría***

III) *Si* $(a, b) \in R$ *y* $(b, c) \in R$ *entonces* $(a, c) \in R$ ***transitividad***

Ejemplo Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y una relación sobre A dada por $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. En este caso se tiene

$$\begin{array}{l} (1,1) \in R \\ (2,2) \in R \ \Rightarrow \ R \ es \ reflexiva \\ (3,3) \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1,1) \in R \ \wedge \ (1,1) \in R \\ (2,2) \in R \ \wedge \ (2,2) \in R \\ (3,3) \in R \ \wedge \ (3,3) \in R \ \Rightarrow \ R \ es \ simétrica \\ (1,2) \in R \ \wedge \ (2,1) \in R \\ (2,1) \in R \ \wedge \ (1,2) \in R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1,1) \in R \ \wedge \ (1,1) \in R \ \wedge \ (1,1) \in R \\ (1,1) \in R \ \wedge \ (1,2) \in R \ \wedge \ (1,2) \in R \\ (2,2) \in R \ \wedge \ (2,2) \in R \ \wedge \ (2,2) \in R \\ (2,2) \in R \ \wedge \ (2,1) \in R \ \wedge \ (2,1) \in R \\ (3,3) \in R \ \wedge \ (3,3) \in R \ \wedge \ (3,3) \in R \ \Rightarrow \ R \ es \ transitiva \\ (1,2) \in R \ \wedge \ (2,2) \in R \ \wedge \ (1,2) \in R \\ (1,2) \in R \ \wedge \ (2,1) \in R \ \wedge \ (1,1) \in R \\ (2,1) \in R \ \wedge \ (1,1) \in R \ \wedge \ (2,1) \in R \\ (2,1) \in R \ \wedge \ (1,2) \in R \ \wedge \ (2,2) \in R \end{array}$$

Definición 7. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto $A \neq \emptyset$. Sea $a \in A$. **La clase de equivalencia** de a denotada $[a]$ o por $[a]_R$ es el conjunto de todos los elementos de A relacionados con a. Es decir*

$$[a] = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}$$

Ejemplo Se probo que para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ la relación $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ es una relación de equivalencia, y en ese caso se tiene

$$[1] = \{1, 2\}$$

$$[2] = \{1, 2\} = [1]$$

$$[3] = \{3\}$$

se tienen dos clases distintas [1] y [3] ambas son subconjuntos de A.

Proposición 1. *Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto no vacío A y sean $a, a' \in A$. Entonces se cumple lo siguiente:*

I) $(a, a') \in R$, *si y sólo si* $[a] = [a']$

II) *$(a, a') \notin R$, si y sólo si $[a] \cap [a'] = \emptyset$*

Demostración. I) Sean $a, a' \in A$ y supongamos que $(a, a') \in R$ y sea $b \in [a]$. Tenemos que $(b, a) \in R$ y como $(a, a') \in R$ entonces por la transitividad de R $(b, a') \in R$ por lo que $b \in [a']$, concluimos entonces $[a] \subset [a']$.
Para ver la otra contención observemos que como $(a, a') \in R$ y la relación es simétrica entonces $(a, a') \in R$; por lo antes probado tenemos que $[a'] \subset [a]$. Por lo tanto $[a] = [a']$.
Ahora veamos que si $[a] = [a']$, entonces $(a, a') \in R$. Supongamos que $[a] = [a']$. Como $(a, a) \in R$, por la reflexividad de R, tenemos que $a \in [a]$. Como $[a] = [a']$, $a \in [a']$, por lo que $(a, a') \in R$.

II) Sean $a, a' \in A$.
Para demostrar que $(a, a') \notin R$ implica que $[a] \cap [a'] = \emptyset$, veamos que si $[a] \cap [a'] \neq \emptyset$, entonces $(a, a') \in R$. Supongamos que $[a] \cap [a'] \neq \emptyset$ y sea $b \in [a] \cap [a'] \neq \emptyset$. Como $b \in [a]$, tenemos que $(b, a) \in R$ y debido a que la relación es simétrica $(a, b) \in R$. Además, $b \in [a']$, por lo que $(b, a') \in R$. Así, $(a, b) \in R$ y $(b, a') \in R$, lo cual implica, usando que la relación es transitiva, que $(a, a') \in R$.
Ahora, sabemos por el inciso anterior que si $(a, a') \in R$, entonces $[a] = [a']$. Como $a \in [a]$, $a \in [a']$, por lo que $[a]n[a'] \neq \emptyset$. Así, tenemos que si $(a, a') \in R$, entonces $[a] \cap [a'] \neq \emptyset$, por lo que $[a] \cap [a'] = \emptyset$ implica que $(a, a') \notin R$.

□

Definición 8. *Sae A un conjunto no vacio, R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$. Cualquier elemento $b \in [a]$ se llama representante de la clase $[a]$.*

Definición 9. *Sea A un conjunto no vacío y R una relación de equivalencia sobre A. El conjunto cociente de A bajo R, denotado A/R es el conjunto de todas las clases de equivalencia inducidas por R. Es decir,*

$$A/R = [a] : a \in A.$$

del ejemplo visto anteriormente se tiene

$$A/R = \{[1], [2], [3]\} = \{[1], [3]\}$$

Definición 10. *Sean $A \neq \emptyset$ e $I \neq \emptyset$ dos conjuntos tales que para cada $i \in I$, existe un subconjunto $A_i \subseteq A$. Decimos que el conjunto*

$$P = \{A_i \mid i \in I\}$$

*es una **partición** de A si y sólo si*

1. *$\forall\, i \in I$, $A_i \neq \emptyset$*
2. *Si $i, j \in I$ son tales que $A_i \neq A_j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$;*
3. *Para toda $a \in A$, hay un $i \in I$ tal que $a \in A_i$*

Ejemplo Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Veamos que $P = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ es una partición de A.
Claramente los elementos de P son no vacíos, pues todos tienen al menos un elemento. Además, como $1 \neq 3$ y $2 \neq 3$, $\{1, 2\} \cap \{3\} = \emptyset$ y los elementos de P son ajenos por pares. También es claro que para toda $a \in A$, existe un elemento $p \in P$ tal que $a \in p$. Por lo tanto, P es una partición de A.

Teorema 1. *Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto $A \neq \emptyset$. Entonces las clases de equivalencia cumplen lo siguiente:*

I) *Si* $a \in A$*, entonces* $[a] \neq \emptyset$

II) *Para cualesquiera* $a, a' \in A$*, si* $[a] \neq [a']$*, entonces* $[a] \cap [a'] = \emptyset$

III) *Para toda* $a \in A$*, hay* $a' \in A$ *talque* $a \in [a']$

En otras palabras, el conjunto cociente $A/R = \{[a] : a \in A\}$ *es una partición de* A*.*

Demostración. I) Sea $a \in A$. Como la relación es reflexiva, sabemos que $(a, a) \in R$, por lo cual $a \in [a]$ y $[a] \neq \emptyset$.

II) Sean $a, a' \in A$. Supongamos que $[a] \neq [a']$ por la contrapositiva del resultado anterior $[a] \cap [a'] = \emptyset$

III) Dada $a \in A$, es claro que hay un $a' \in A$, haciendo $a' = a$, tal que $a \in [a']$, pues en este caso $[a'] = [a]$. □

Corolario 1. *Si* $A \neq \emptyset$ *y* R *es una relación de equivalencia en* A*,* A/R *es una partición de* A*. Es decir,* R *determina o induce una partición del conjunto* A*.*