Teorema de Heine Borel

El teorema de Heine Borel da una caraterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$

Teorema 1. Heine-Borel *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si y solo si K es cerrado y acotado*

Demostración. Según los resultados anteriores, si K es compacto entonces es cerrado y acotado.
Inversamente, supongamos que K es cerrado y acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que K esta contenido en el cubo

$$Q = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [-r, r],\ i = 1, ..., n\}$$

que es compacto según los resultados anteriores, y por la misma razón K también lo es □

La demostración del teorema de Heine-Borel se basó en el hecho de que podemos cubrir a un cubo en R^n (y, en consecuencia, a cualquier subconjunto acotado) con un número finito de bolas de radio ϵ, para cualquier $\epsilon > 0$. Esto no es cierto en un espacio métrico arbitrario, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo La bola cerrada

$$\overline{B}_{\ell_2} = \left\{ (x_n) \in \ell_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1 \right\}$$

no es compacta en ℓ_2

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos $\epsilon_k \in \ell_2$ a la sucesión cuyo k-ésimo término es 1 y todos los demás términos son 0. Claramente $\epsilon_k \in \overline{B}_{\ell_2}(0, 1)$. Observa que

$$\|e_j - e_k\|_2 = \sqrt{2} \ \ \forall\ j \neq k$$

Supongamos que una subsucesión (e_{k_j}) converge a e en ℓ_2.
Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|e_{k_j} - e\|_2 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \ \forall\ j \geq j_0$. En consecuencia,

$$\|e_{k_j} - e_{k_i}\|_2 \leq \|e_{k_j} - e\|_2 + \|e - e_{k_i}\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \ \ \forall\ i, j \neq j_0$$

lo cual es imposible. Esto prueba que (e_k) no contiene ninguna subsucesión convergente y por lo tanto $\overline{B}_{\ell_2}(0, 1)$ no es compacta □

Conjuntos Totalmente Acotados

Definición 1. *Un subconjunto A de X es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos $a_1, ..., a_m \in A$ tales que*

$$A \subset B_X(a_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \epsilon)$$

donde $B_X(a, \epsilon)$ denota la bola abierta con centro a y radio ϵ en X.

Proposición 1. *Sea A un subconjunto de X*

a) Si A es compacto, entonces A es totalmente acotado.

b) Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado en X.

c) Si $D \subset A$ y A es totalmente acotado, entonces D es totalmente acotado en X.

d) Si A es totalmente acotado, entonces su cerradura $\overline{A}$ en X es totalmente acotada

Demostración. (a) Si $A \subset X$ es compacto entonces, para toda $\epsilon > 0$, la cubierta abierta $\{B_X(x, \epsilon) \mid x \in A)$ de A contiene una subcubierta finita. Es decir, existen $x_1, ..., x_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B_X(x_m, \epsilon)$$

(b) Si $A \subset X$ es totalmente acotado entonces existen $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \epsilon)$$

En consecuencia, $A \subset B_X(a_1, r+1)$ donde $r = \text{máx}\{d_X(a_1, a_j) \mid j = 2, ..., m\}$, es decir, A es acotado.
(c) Sean A un subconjunto totalmente acotado, $D \subset A$ y $\epsilon > 0$. Entonces existen $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X\left(a_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup B_X\left(a_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Sea

$$J = \left\{j \in \{1, ..., m\} \mid B_X\left(a_j, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap D \neq \emptyset\right\}$$

Para cada $j \in J$ elegimos un punto

$$b_j = B_X\left(a_j, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap D$$

Entonces se cumple que

$$D \subset \bigcap_{j \in J} B_X\left(b_j, \epsilon\right)$$

Esto prueba que D es totalmente acotado.
(d) Sean A un subconjunto totalmente acotado de X, $\epsilon > 0$ y $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X\left(a_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup B_X\left(a_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Como

$$\overline{B}_X\left(a_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \overline{B}_X\left(a_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

es cerrado, se tiene que

$$\overline{A} \subset \overline{B}_X\left(a_1, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \overline{B}_X\left(a_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

en consecuencia,

$$\overline{A} \subset B_X\left(a_1, \epsilon\right) \cup \cdots \cup B_X\left(a_m, \epsilon\right)$$

Esto prueba que $\overline{A}$ es totalmente acotado □