Conjuntos

Elementos y Conjuntos Si X es un conjunto, la relación $x \in X$ significa que x es un elemento del conjunto X, la negación de esta relación se escribe $x \notin X$.

Si X e Y son dos conjuntos, la relación $X \subset Y$ significa que cada elemento de X es un elemento de Y (dicho de otro modo, es equivalente a la relación $(\forall\ x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$); de la definición se deduce que $X \subset X$, y la relación ($X \subset Y$ y $Y \subset Z$) implica $X \subset Z$.

Si $X \subset Y$ e $Y \subset X$ es $X = Y$, es decir, dos conjuntos son iguales si y solo si poseen los mismos elementos.

Si $X \subset Y$ se dice que X está contenido en Y, o que Y contiene a X, o que X es un subconjunto de Y; también se puede escribir $Y \supset X$.

La negación de $X \subset Y$ se escribe $X \not\subset Y$.

Dado un conjunto X y una propiedad P, hay un único subconjunto de X cuyos elementos son todos los elementos $x \in X$ para los cuales $P(x)$ es cierta; este subconjunto se indica

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

La relación $\{x \in X \mid P(x)\} \subset \{x \in X \mid Q(x)\}$ es equivalente a

$$((\forall\ x \in X)(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

La relación $\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \in X \mid Q(x)\}$ es equivalente a

$$(\forall\ x \in X)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$$

El conjunto $\emptyset_x = \{x \in X \mid x \neq x\}$ se llama subconjunto vacio de X; éste, no contiene elemento alguno. Si P es una propiedad cualquiera, la relación

$$x \in \emptyset_x \Rightarrow P(x)$$

es cierta para cada x, puesto que la negación $x \in \emptyset_x$ es cierta para cada x (recuerdese que $Q \Rightarrow P$ significa no Q o P).

Por tanto, si X e Y son conjuntos, $x \in \emptyset_x$ implica $x \in \emptyset_y$, o dicho de otra forma $\emptyset_x \subset \emptyset_y$, y análogamente $\emptyset_y \subset \emptyset_x$ de donde resulta $\emptyset_x = \emptyset_y$, es decir, todos los conjuntos vacios son iguales pudiendo por tanto representarlos por $\emptyset$.

Si a es un objeto, el conjunto que posee a como único elemento se escribe $\{a\}$.

Si X es un conjunto, existe un conjunto (único) cuyos elementos son todos los subconjuntos de X; se escribe $\mathcal{P}(X)$. Se tiene que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$, $X \in \mathcal{P}(X)$ las relaciones $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ son equivalentes; las relaciones $Y \subset X$ y $Y \in \mathcal{P}(X)$ son equivalentes

Operaciones entre conjuntos Si X e Y son dos conjuntos tales que $Y \subset X$ el conjunto

$$\{x \in X \mid x \notin Y\}$$

es un subconjunto de X llamado diferencia de X e Y o complemento de Y con respecto a X, y se escribe $X - Y$ suele usarse la notación $C_x Y$ ó $C\ Y$

Dados dos conjuntos X e Y, existe un conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos, a X y a Y, es decir

$$\{x \in X \mid x \in Y\}$$

se denomina intersección de X e Y y se escribe $X \cap Y$.
Dados dos conjuntos X e Y, existe un conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno por lo menos de los dos conjuntos X, Y; se denomina la reunión de X e Y y se escribe $X \cup Y$
Las proposiciones siguientes son inmediatas de las definiciones

1. $X - X = \emptyset, \quad X - \emptyset = X$
2. $X \cup X = X, \quad X \cap X = X$
3. $X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X$
4. Las relaciones $X \subset Y, \quad X \cup Y = Y, \quad X \cap Y = X$ son equivalentes
5. $X \subset X \cup Y, \quad X \cap Y \subset X$
6. La relacion $X \subset Z, \quad Y \subset Z$ es equivalente a $X \cup Y \subset Z$
7. La relacion $Z \subset X$, y $Z \subset Y$ es equivalente a $Z \subset X \cap Y$
8. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ escrito $X \cup Y \cup Z$
9. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ escrito $X \cap Y \cap Z$
10. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
11. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (distributividad)
12. Si X, Y son subconjuntos de un conjunto E

$$C(C\ X) = X$$
$$C(X \cup Y) = (C\ X) \cap (C\ Y)$$
$$C(X \cap Y) = (C\ X) \cup (C\ Y)$$

Las relaciones $X \subset Y$, $C\ X \supset C\ Y$ son equivalentes; las relaciones $X \cap Y = \emptyset$, $X \subset C\ Y$, $Y \subset C\ X$ son equivalentes. La reunión $\{x\} \cup \{y\}$ se escribe $\{x, y\}$; análogamente $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ se escribe $\{x, y, z\}$; etc.
Sea I algún conjunto y para cada $i \in I$ sea X_i otro conjunto.
El conjunto de todos los conjuntos X_i donde $i \in I$ se denota

$$\{X_i \mid i \in I\}$$

y la unión y la intersección de esta familia de conjuntos, se define

$$\cap_{i \in I} X_i = \{x \mid para\ cada\ i \in I,\ x \in X_i\}$$

$$\cup_{i \in I} X_i = \{x \mid para\ al\ menos\ una\ \ i \in I,\ x \in X_i\}$$

Producto de dos conjuntos A cada dos objetos a, b les corresponde un nuevo objeto, su par ordenado (a, b); la relación $(a, b) = (a', b')$ es equivalente a $a = a'$ y $b = b'$ en particular, $(a, b) = (b, a)$ si y solo si $a = b$.
Dados dos conjuntos X, Y (distintos o no, existe un conjunto (único) cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in X$ e $y \in Y$; se escribe $X \times Y$ y se denomina producto cartesiano de X e Y.
Las proposiciones siguientes son consecuencia inmediata de las definiciones

1. La relacion $X \times Y = \emptyset$ es equivalente a $X = \emptyset$ ó $Y = \emptyset$
2. Si $X \times Y \neq \emptyset$, la relación $X' \times Y' \subset X \times Y$ es equivalente a $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$
3. $(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \times X') \times Y$
4. $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$

El producto de tres conjuntos X,Y y Z se define como

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$$