Funciones

Definición 1. *Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Una función f del conjunto X en el conjunto Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in Y$. La notación para una función es:*

$$f : X \to Y$$

Definición 2. *El conjunto*

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in X \mid \exists\ f(x) = y \in Y\}$$

*es llamado el **dominio** de f, se denota $\mathfrak{D}(f)$*

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

Encontrar el dominio de f.

Solución En este caso se tiene que

$$y = f(x) \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x-4} \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ x - 4 \neq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

por lo tanto

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)\}$$

Definición 3. *El conjunto Y es llamado el **codominio** de f.*

Definición 4. *El conjunto*

$$\mathfrak{R}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in \mathfrak{D}(f) \subset X\}$$

*es llamado el **rango** de f. El rango de una función es un subconjunto del codominio.*

Ejemplo Encontrar el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

Solución En este caso

$$\mathfrak{R}(f) = \left\{ y = \frac{1}{x-4} \in\ Y \ \middle|\ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \right\}$$

Tenemos que

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4y+1}{y}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{4y+1}{y} \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \ \Leftrightarrow\ y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \ \text{ ó } \ y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \ \middle|\ \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \ \middle|\ \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad y \in \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in\in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Por lo tanto

$$\Re(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Definición 5. *Dos funciones $f : X \to Y$ y $g : X' \to Y'$ se dice que son iguales si*

$$X = X', \quad Y = Y', \quad y \quad \forall\, x \in \; X, \quad f(x) = g(x)$$

Definición 6. *Función acotada*
Se dice que $f : X \to Y$ está acotada si el conjunto de números reales $f(X)$ está acotado; es decir, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \; \forall x \in A$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es acotada

Solución En este caso tenemos que

$$x^2 \geq 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x^2+1 \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 < 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

por lo tanto

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| < 1$$

por lo tanto f es una función acotada

Definición 7. *Función Par*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es par si $f(x) = f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es par

Solución En este caso tenemos que

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

por lo tanto f es una función par

Definición 8. *Función Impar*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es impar si $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por x^3. Vamos a comprobar que f es impar

Solución En este caso tenemos que

$$-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$$

por lo tanto f es una función impar

Definición 9. *Función Periódica*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es periódica si $\exists$ $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in X$. El número T es el periodo de la función

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x + [x]$. Donde $[x]$ denota al mayor entero $\leq x$. Vamos a comprobar que f es periódica

Solución En este caso tenemos que

$$x \in (1,2) \;\Rightarrow\; [x] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 1$$

por ejemplo

$$x = 1{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [1{,}5] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = 1{,}5 - 1 = {,}5$$

mientras que

$$x \in (2,3) \;\Rightarrow\; [x] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 2$$

por ejemplo

$$x = 2{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [2{,}5] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = 2{,}5 - 2 = {,}5$$

por lo tanto $f(x) = x - [x]$ es una función periódica

Definición 10. *Función Monotona*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona creciente si para dos puntos arbitrarios x y x' de X tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \leq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) < f(x')$. $\forall x, x' \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x^3$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente creciente

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; x^3 < x_1^3 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = x^3$ es una función monotona estrictamente creciente

Definición 11. *Función Monotona*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona decreciente si para dos puntos arbitrarios x y x' de X tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \geq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) > f(x')$. $\forall x, x' \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente decreciente

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x)$$

por lo tanto $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función monotona estrictamente decreciente

Definición 12. *Función Constante*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es constante si $f(x) = c \ \forall x \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = 5$. Vamos a comprobar que f es cosntante

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; f(x) = 5 = f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = 5$ es una función constante

Definición 13. *Función Identidad*
Es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = x \ \forall x \in X$

Definición 14. *Función Característica*
Si S es un subconjunto de X se define en X una función real llamada función característica del conjunto S

$$X_S : X \to Y \quad \textit{como} \quad X_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Definición 15. *Función Polinomial*
Se designará con el nombre de función polinomial a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada por una fórmula del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

donde n es un número natural o cero y los coeficientes a_i son números reales.

Definición 16. *Función Racional*
Se designará con el nombre de función racional a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada como el cociente de dos polinomios

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$$

f está definida para todos los valores de x en los que no se anula el denominador.

Definición 17. *Función inyectiva ó uno-uno*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es inyectiva ó uno-uno si:

$$Dados \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Equivalentemente, mediante la implicación contrarreciproca, podemos decir Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \quad tal \quad que \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejemplo *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.*
Para ver que f es inyectiva

$$Sean \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f \quad es \quad inyectiva$$

Definición 18. *Función Suprayectiva ó Sobreyectiva*
Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\Re(f) = Y$. Esto es

$$f : X \to Y \quad es \quad sobreyectiva \;\Leftrightarrow\; \forall\; y \;\in\; Y,\; \exists\; x \in X \;\ni\; f(x) = y$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\; y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = f(x) \;\Rightarrow\; y = -x + 1 \;p\;a\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

Definición 19. *Función Biyectiva*
Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\Re(f) = Y$. Y además f es uno-uno, se dice que f es biyectiva

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es inyectiva tenemos que

$$Sean \;\; x,\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\ni\; f(x) = f(x_1) \;\Rightarrow\; -x + 1 = -x_1 + 1 \;\Rightarrow\; -x = -x_1 \;\Rightarrow\; x = x_1$$

y por lo tanto f es inyectiva.
Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\; y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = f(x) \;\Rightarrow\; y = -x + 1 \;p\;a\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva y en consecuencia f es biyectiva

Operaciones con funciones

Definición 20. *Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ $g : B \to \mathbb{R}$. Las funciones suma, diferencia, producto y cociente se definen en el conjunto $A \bigcap B$ como sigue:*

$$\begin{aligned} f+g: &\quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ f-g: &\quad (f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ f \times g: &\quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ \frac{f}{g}: &\quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A \bigcap B \quad \ni g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Composición de funciones

Definición 21. *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ supongamos que $\mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$ entonces $h : A \to C$ es la función compuesta $h = g \circ f$ si se verifica*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \quad \forall x \in A, \quad y \quad \mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$$

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x-3$. Calcular $f \circ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $g \circ f(3)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-3\right) = f(-2) = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g\left(\frac{1}{3-1}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -2$$

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x-3$. Obtener las reglas de correspondencia para $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{1}{2x-3-1} = \frac{1}{2x-4}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3 = \frac{2}{x-1} - 3 = \frac{2-3(x-1)}{x-1} = \frac{5-3x}{x-1}$$

Ejemplo Si f es una función par y g es una función par se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(x)=f(-x)} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función par

Ejemplo Si f es una función impar y g es una función impar se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(-x)=-f(x)} g(-f(x)) \underbrace{=}_{-g(x)=g(-x)} -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función impar

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2 \therefore g \circ f$ es inyectiva □

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C\ g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ □

Propiedades de la Composición de Funciones

Propiedad Asociativa Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ entonces $h : A \to D$. Entonces se verfica

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Comprobación Tenemos que

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

por otra parte

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

por lo tanto

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$