Imagenes de funciones

Imagenes directas Sean $f : X \to Y$ y $E \subseteq X$, denotamos por

$$f[E] = \{f(x) \mid x \in E\}$$

a la imagen del conjunto A bajo f.

Proposición 1. *a) Si* $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ *y si* $A \subset B$ *entonces* $f(A) \subset f(B)$

Demostración. Sea $z \in f(a) \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B$ tal que $f(x) = z$ $A \subset B \Rightarrow z \in f(B) \therefore f(A) \subset f(B)$ □

Proposición 2. *a) Si* $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ *se tiene entonces que* $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$

Demostración. Sea $z \in f(A \bigcup B) \Rightarrow \exists x \in A \bigcup B$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad ó \quad x \in A$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad f(x) = z$ ó $\exists x \in A \quad y \quad f(x) = z \therefore z \in f(B)$ ó $z \in f(A) \Rightarrow z \in f(a) \bigcup f(B) \therefore f(A \bigcup B) \subset f(A) \bigcup f(B)$
Por otro lado

$$A \subset A \bigcup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \bigcup B)$$

$$B \subset A \bigcup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \bigcup B)$$

$$\Rightarrow f(A) \bigcup f(B) \subset f(A \bigcup B)$$

□

Proposición 3. *a) Si* $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$ *se tiene entonces que* $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$

Demostración. Sea $z \in f(A \bigcap B) \Rightarrow \exists x \in A \bigcap B$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad x \in A$ tal que $f(x) = z \Rightarrow \exists x \in B \quad y \quad f(x) = z$ y $\exists x \in A \quad y \quad f(x) = z \therefore z \in f(B)$ y $z \in f(A) \Rightarrow z \in f(a) \bigcap f(B) \therefore f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$ □

Imagenes inversas de funciones Sean $f : X \to Y$ y $H \subset Y$, denotamos por

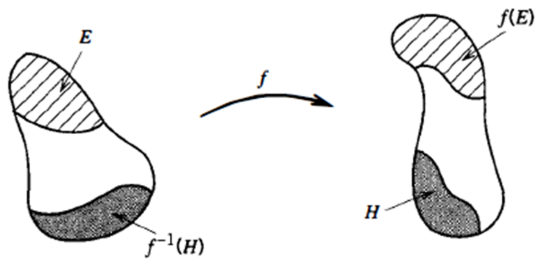
$$f^{-1}[H] = \{x \in X | f(x) \in H\}$$

a la imagen inversa de A bajo f.
las siguientes afirmaciones son claras

$$Si \quad x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A$$

$$Si \quad f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

Es decir, un elemento del dominio pertenece a la preimagen de A, si y solo si su imagen pertenece a A.



Proposición 4. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$*

Demostración. Sea

$z \in f^{-1}(A \bigcup B) \Leftrightarrow f(x) \in (A \bigcup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \quad \acute{O} \quad f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad \acute{o} \quad x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$

□

Proposición 5. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$*

Demostración. Sea

$z \in f^{-1}(A \bigcap B) \Leftrightarrow f(x) \in (A \bigcap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \quad y \quad f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad y \quad x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$

□

Proposición 6. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$*

Demostración. Sea

$$z \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

□

Proposición 7. *Sea $f : X \to Y$ una función se tiene entonces que $f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A$*

Demostración. Si $x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \therefore f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A$ □

Proposición 8. *Si $G \subseteq H$ entonces $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$*

Demostración. Si $x \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(x) \in G \subseteq H \Rightarrow x \in f^{-1}(H)$ □

Proposición 9. *Mostrar que $B \subseteq f^{-1}(f(B))$*

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(f(B)) \Rightarrow f(x) \in f(B) \therefore B \subseteq f^{-1}f(B)$ □

Proposición 10. *sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ si $A \subseteq Z$ Mostrar que*

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

Demostración. Sea $x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Rightarrow g(f(x)) \in A \Rightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ □