Conjuntos finitos

En primer lugar, dos conjuntos entre los cuales se pueda establecer una aplicación biyectiva deberían tener el mismo tamaño. Además, si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ debería ser "finito" y tener exactamente n elementos.
Decimos que un conjunto A es equipotente a un conjunto B cuando existe una aplicación biyectiva de A sobre B, en cuyo caso escribimos $A \sim B$. Es evidente que cualquier conjunto A verifica que $A \sim A$, puesto que la identidad en A es una aplicación biyectiva de A sobre sí mismo, luego la equipotencia entre conjuntos es un relación reflexiva. También es simétrica, es decir, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, pues si $f : A \to B$ es una aplicación biyectiva, su inversa $f^{-1} : B \to A$ también es biyectiva. Finalmente, también es una relación transitiva, es decir, de $A \sim B$ y $B \sim C$ se deduce que $A \sim C$, puesto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son aplicaciones biyectivas, la composición $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva.
Se dice que un conjunto A es finito cuando existe un número natural n tal que

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

En este caso, se dice que A tiene n elementos.
Para cada número natural n consideramos el conjunto

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$$

Proposición 1. *Si $m, n \in N$, entonces*

$$I_m \sim I_n \;\Rightarrow\; m = n$$

Teorema 1. *Sean $m, n \in N$. Si $m \neq n$, entonces no existe una biyección entre I_m e I_n.*

Demostración. Sean $m, n \in N$ tales que $m \neq n$. Como $m \neq n$ por la tricotomía del orden $<$ tenemos que $m < n$ o $n < m$.
Se demostrará por iducción sobre m que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $m < n$, entonces no existe una biyección $g : I_m \to I_n$.

Base Supongamos que $m = 0$ y sea n tal que $0 < n$. Sabemos que $I_0 = \emptyset$. Como $I_n \neq \emptyset$, pues $n \in I_n$ dado $0 < n$, no hay una función $g : I_0 \to I_n$ que pueda ser sobre. Así, no existe una biyección entre I_0 e I_n.

Hipótesis de inducción Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $m < n$, entonces no existe una biyección entre I_m e I_n.
Supongamos ahora que si existe una biyección $f : I_{m+1} \to I_n$ para algún n tal que $m + 1 < n$.
Tenemos que $f(m+1) \in I_n$, sin perdida de generalidad, digamos que $f(m+1) = n$. Esto lo podemos suponer, pues en el caso que $f(m + 1) = k$ con $k \neq n$, definimos $g : I_n \to I_n$ como la función que intercambia k con n y deja fijos a los otros elementos de I_n, es decir

$$g(j) = \begin{cases} k & si \quad j = n \\ n & si \quad j = n \\ j & si \quad j \neq k \quad y \quad j \neq n \end{cases}$$

y trabajamos con la biyección $g \circ f$ en vez de trabajar con f.
Ahora como $n > m + 1$, $n > 0$. Entonces, restringiendo el dominio de f a I_m y el codominio de f a

I_{n-1}, obtenemos la función $h : I_m \to I_{n-1}$ definida como $h(i) = f(i)$. Como h es la restricción de la función inyectiva, esta función es a su vez inyectiva. Además, dado que f es sobre en I_n, $f(m+1) = n$ y el codominio de h es $I_{n-1} = I_n - \{n\}$, concluimos que h es sobre. Asi, $h : I_m \to I_{n-1}$ es biyectiva. Pero como $m < n - 1$, pues $m + 1 < n$, esto contradice la hipótesis de inducción que asegura que para todo natural mayor que m dicha biyección no puede existir.
Por lo tanto, no puede existir una biyección $f : I_{m+1} \to I_n$ para todo $n > m + 1$

□

Corolario 1. *Si A es un conjunto finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A.*

Demostración. Sea A un conjunto finito, entonces por definición de finito existe $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : I_n \to A$. Supongamos que para alguna $m \in \mathbb{N}$ existe una biyección $g : I_m \to A$. Tenemos que $f^{-1}A \to I_n$ también es una función biyectiva. Por lo tanto, $f^{-1} \circ g : I_m \to I_n$ sería una biyección, pues la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Así por la contrapuesta del teorema anterior, $m = n$. Concluimos que para todo conjunto finito A, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una biyección entre I_n y A. □

Los conjuntos que no son finitos se llaman infinitos

Conjuntos numerables

Definición 1. *Sea A un conjunto y n un número natural positivo. Diremos que A tiene n elementos si existe una función biyectiva*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$

En este caso escribiremos

$$|A| = n$$

El símbolo $|A|$ se lee el número de elementos de A, también se dice la cardinalidad de $|A|$.

Definición 2. *Sean A, B conjuntos. Decimos que A y B tienen el mismo cardinal si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso denotamos*

$$|A| = |B|$$

Definición 3. *Sea A un conjunto. Decimos que*
(a) A es finito, si tiene el mismo cardinal que $\{1, 2, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.
(b) A es numerable, si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.
(c) A es contable, si es finito o numerable.
(d) A es no-numerable, si no es contable.
(e) A es infinito, si no es finito

Lema 1. *Un conjunto A no vacío es numerable si, y sólo si, existe $g : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos que A es numerables y sea $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva. Sea $b \in A$ fijo. La función $g : \mathbb{N} \to A$ definida por

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= a \quad \forall\, a \in \; A \\ g(n) &= b \quad \forall\, n \in \; \mathbb{N} \setminus \; f(A) \quad (si\ f(A) \neq \mathbb{N}) \end{aligned}$$

es claramente sobreyectiva.
Supongamos ahora que existe $g:\mathbb{N}\to A$ sobreyectiva. La función $f:A\to\mathbb{N}$ definida por

$$f(a)=\text{mín}\{n\in\mathbb{N}\mid g(n)=a\}$$

es inyectiva $\square$

Teorema 2. *Todo subconjunto infinito E, de un conjunto numerable A, es numerable*

Demostración. Como A es numerable, existe una biyección

$$f:\mathbb{N}\to A$$

Ahora se define la función $g:\mathbb{N}\to E$ recursivamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
g(1)&=f\left(\text{mín}\left(f^{-1}(E)\right)\right)\\
g(2)&=f\left(\text{mín}\left(f^{-1}(E)\right)\backslash\{g(1)\}\right)\\
&\vdots\\
g(n)&=f\left(\text{mín}\left(f^{-1}(E)\right)\backslash\{g(1),g(2),\dots,g(n-1)\}\right)
\end{aligned}$$

Para ver que g es inyectiva, supongamos que $m\neq n$ (digamos $m<n$). Debe ocurrir que $g(m)\neq g(n)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
g(n)&\in f\left(\text{mín}\left(f^{-1}(E)\right)\backslash\{g(1),g(2),\dots,g(n-1)\}\right)\\
&=E\backslash\{g(1),g(2),\dots,g(n-1)\}\\
&\subset E\backslash\{g(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces $g(m)\neq g(n)$.
Para ver que g es sobre, supongamos $e\in E$. Entonces $e=f(N)$, para algún $N\in\mathbb{N}$ (f es sobre). Tenemos que

$$f^{-1}(f(\{1,2,...,-N\})\cap E)\subset f^{-1}(f(\{1,2,...,-N\})=\{1,2,...,N\}$$

por lo que podemos ordenar los elementos de $f^{-1}(f(\{1,2,...,-N\})\cap E)$ de la siguiente manera

$$f^{-1}(f(\{1,2,...,-N\})\cap E)=\{n_1,n_2,...,n_k\}$$

Como $e=f(N)$, tenemos que $n_k=N$. Además por construcción

$$\begin{aligned}
g(1)&=f(n_1)\\
g(2)&=f(n_2)\\
&\vdots\\
g(k)&=f(n_k)=f(N)=e
\end{aligned}$$

entonces $g(k)=e$, por lo que g es inyectiva $\square$

Proposición 2. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Es decir que si I es un conjunto numerable y A_i es un conjunto numerable para cada $i \in I$, entonces el conjunto*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

es un conjunto numerable.

Demostración. Podemos suponer que $I \neq \emptyset \neq A_I$. Existen funciones

$$g : \mathbb{N} \to I, \quad f_i : \mathbb{N} \to A_i, \ \forall \ i \in I$$

sobreyectivas.
Definimos $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ dada por

$$h(m, n) = f_{g(n)}(m)$$

Veamos que h es sobreyectiva. Dado $a \in A$, elegimos $i \in I$ tal que $a \in A_i$, entonces elegimos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$g(n) = i \quad y \quad f_i(m) = a$$

Al ser $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numerable se puede construir una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y en consecuencia existe también una función de $\mathbb{N}$ sobre A. Por tanto A es numerable □

Teorema 3. *(Teorema de Banach). Si M y N son conjuntos, y $f : M \to N$ y $g : N \to M$ funciones, entonces existen $A \subset M$ y $B \subset N$ tales que $f(A) = B$ y $g(N - B) = M - A$*

Demostración. Consideremos la función $\varphi : P(M) \to P(M)$ dada por

$$\varphi(C) = M - (g(N - f(C)))$$

Si probamos que φ tiene un punto fijo, es decir que existe $A \in P(M)$ tal que $\varphi(A) = A$, entonces A y $B = f(A)$ satisfacen la tesis. En efecto

$$\begin{aligned} A &= \varphi(A) \\ &= M - (g(N - f(A))) \\ &= M - (g(N - B)) \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que

$$g(N - B) = M - A$$

Basta entonces probar que φ tiene un punto fijo.
Veamos primero φ es monótona creciente en $(P(M), \subset)$.
Sean $A_1, A_2 \in P(M)$ tales que $A_1 \subset A_2$, entonces tenemos la siguiente situación

$$\begin{aligned} f(A_1) \subset f(A_2) &\Rightarrow N - f(A_1) \supset N - f(A_2) \\ &\Rightarrow g(N - f(A_1)) \supset g(N - f(A_2)) \\ &\Rightarrow M - g(N - f(A_1)) \subset M - g(N - f(A_2)) \\ &\Rightarrow \varphi(A_1) \subset \varphi(A_2). \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\Gamma = \{G \in P(M) \mid \varphi(G) \subset G\} \neq \emptyset$$

Esto es cierto pues $M \in \Gamma$. Sea $A = \bigcap_{G \in \Gamma} G$. Queremos ver que $A \in \Gamma$ con lo que $\varphi(A) \subset A$.
Sabemos que $A \subset G, \ \forall\ G \in \Gamma$. De aquí que $\varphi(A) \subset \varphi(G), \quad \forall\ G \in \Gamma$ por ser φ monótona creciente. Además, por la definición de Γ, obtenemos que $\varphi(A) \subset G, \quad \forall\ G \in \Gamma$. Por lo tanto $\varphi(A) \subset A$.
Resta ver que $A \subset \varphi(A)$. Como $\varphi(A) \subset A$ y φ es monótona creciente, tenemos que $\varphi(\varphi(A)) \subset \varphi(A)$. Luego $\varphi(A) \in \Gamma$. Es decir, $\varphi(A)$ es uno de los G que participan de la definición de A y entonces $A \subset \varphi(A)$.
Luego, existe $A \in P(M)$ tal que $A = \varphi(A)$ □

Teorema 4. *(Teorema de Cantor-Bernstein). Dados dos conjuntos M y N. Si existen funciones $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que f y g son inyectivas, entonces existe una biyección de M a N.*

Demostración. Vamos a construir una función biyectiva $h : M \to N$. Por el teorema de Banach, existen $A \subset M$ y $B \subset N$ tales que $f(A) = B$ y $g(N - B) = M - A$. Sea $\psi : (M - A) \to (N - B)$ la función inversa de g restringida a $N - B$, y sea $h : M \to N$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \psi(x) & si \quad x \in M - A \end{cases}$$

Veamos que h es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in M$, con $x_1 \neq x_2$. Si $x_1, x_2 \in A$, tenemos que $f(x_1) \neq f(x_2)$ por ser f inyectiva y entonces $h(x_1) \neq h(x_2)$. Si $x_1, x_2 \in M - A$, tenemos que $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$ por ser ψ biyectiva y entonces $h(x_1) \neq h(x_2)$. Por último, si $x_1 \in A$ y $x_2 \in M - A$, sucede que $f(x_1) \in B$ y $\psi(x_2) \in N - B$, por lo que resulta

$$f(x_1) = h(x_1) \neq h(x_2) = \psi(x_2)$$

luego h es inyectiva.
Probemos ahora que h es sobre. Sea $y \in N$. Si $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Es decir, existe $x \in M$ tal que $h(x) = y$. Si $y \in N - B$, entonces $g(y) \in M - A$, luego $\psi(g(y)) = y$. Es decir, $h(g(y)) = y$, por lo que h resulta ser sobre.
Hemos probado entonces que existe $h : M \to N$ biyectiva □

Como consecuencia del teorema anterior se tiene

Corolario 2.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \textit{es numerable}$$

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(m, n) = 2^m 3^n$$

Esta función es inyectiva pues al ser 2 y 3 números primos, la igualdad $2^m 3^n = 2^p 3^q$ con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ implica que $m = p$ y $n = q$. □

Corolario 3. *Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable*

Demostración. Como A y B son numerables, existen funciones inyectivas $\varphi : A \to \mathbb{N}$ y $\psi : B \to \mathbb{N}$. Definiendo

$$f(a, b) = (\varphi(a), \psi(b))$$

para todo $(a, b) \in A \times B$, obtenemos una función inyectiva $f : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, luego $A \times B$ es numerable, por serlo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ □