Resultados fundamentales de $\mathbb{R}$

Los números reales constituyen la base sobre la cual se asienta el Análisis Matemático. Consecuentemente, la primera premisa para avanzar provechosamente en este área será establecer las propiedades del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Relaciones de Orden En $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ verifica las siguientes propiedades

1. $a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a \leq b \;\; o \;\; b \leq a$
2. $a, b, c \in \mathbb{R},\; a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$
3. $a, b, c \in \mathbb{R},\; a \leq b,\; 0 \leq c \;\Rightarrow\; ac \leq bc$

Axioma del supremo Todo conjunto $a \subset \mathbb{R}$ que cumpla $A \neq \emptyset$ y este acotado superiormente, tiene una mínima cota superior

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si A es no vacío y acotado superiormente, entonces $M = \sup\ A$ satisface*

$$
\begin{aligned}
&(1)\; x \leq M,\;\; \forall x \in A \\
&(2)\; \forall \varepsilon > 0 \;\; existe \;\; x \in A \;\; tal \;\; que \;\; M < x + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Demostración.

$\Rightarrow$ *Sea $M = \sup\ A$ entonces*

1) *se cumple por definición de supremo*

2) *supongamos que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in A, M \geq x + \varepsilon$,*
es decir $x \leq M - \varepsilon,\;\; \forall\ x \in A \;\therefore\;\; M - \varepsilon$ es una
cota superior de A y se tiene que $M - \varepsilon < M$
por tanto M no puede ser entonces supremo de A *<u>CONTRADICCIÓN</u>.*

$\Leftarrow$ Supongamos que se cumple 1) y 2) Por reducción al absurdo supongamos que M no es el supremo de A
por 1), M es cota superior de A. Sea $M' < M$ una cota superior y tomamos $\varepsilon = M - M'$ entonces si M cumple 2) $M < x + \varepsilon \;\Rightarrow\; M < x + M - M' \;\Rightarrow\; M' < x$ para algún x <u>CONTRADICCIÓN</u>. Pues M' es cota superior de A. $\therefore\;\; M = \sup\ A$. □

Teorema 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si A es no vacío y acotado inferiormente, entonces $m = \text{ínf}\ A$ satisface*

$$
\begin{aligned}
&(1)\; m \leq x,\;\; \forall x \in A \\
&(2)\; \forall \varepsilon > 0 \;\; existe \;\; x \in A \;\; tal \;\; que \;\; x < m + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sucesiones

Teorema 3. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monotona creciente y acotada superiormente entonces $\{a_n\}$ es convergente*

Demostración. Sea $A = \{a_n \in \{a_n\} | n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $A \neq \emptyset$ y A esta acotado superiormente por tanto existe $\sup A = \alpha$
por ser $\alpha = \sup A$ se tiene que $\alpha \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por tanto $\alpha + \epsilon > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\epsilon > 0$
por otro lado al ser $\alpha = \sup A$ se tien que existe N_ϵ tal que $\alpha - \epsilon < a_{N_\epsilon}$ y como a_n es monotona creciente entonces si $n > N_\epsilon$ entonces $\alpha - \epsilon < a_{N_\epsilon} < a_n$ para todo $n > N_\epsilon$
por tanto $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N_\epsilon$ esto quiere decir que

$$-\epsilon < a_n - \alpha < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

□

Teorema 4. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monotona decreciente y acotada inferiormente entonces $\{a_n\}$ es convergente*

Definición 1. *Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, definimos una* ***subsucesion*** *$\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ como una sucesión de la forma*

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ a_{n_4}, ...,,\ a_{n_k}$$

donde los n_k son números naturales con

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$$

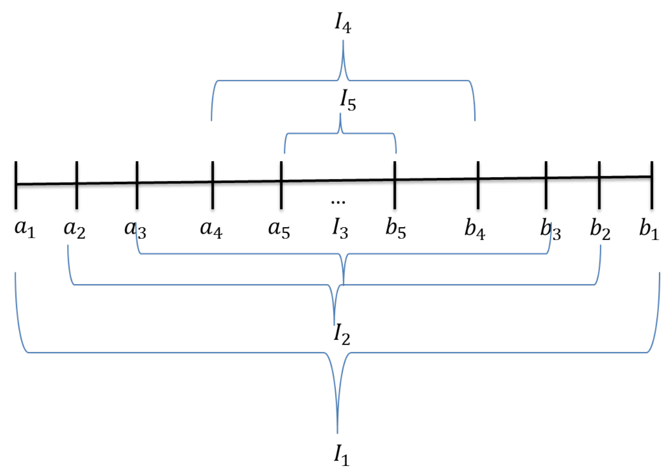
Teorema 5. ***Intervalos Encajados*** *Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados no vacios $I_n = [a_n, b_n]$ tal que*
$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ entonces

$$(1) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

$$(2) \quad Si \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \quad entonces \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad es \quad un \quad punto$$

Demostración. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados no vacios $I_n = [a_n, b_n]$ con

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$$



ahora consideremos las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de los puntos extremos de cada intervalo I_n y como son encajados tenemos

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq .... \leq b_2 \leq b_1$$

Se tiene entonces que la sucesión $\{a_n\}$ es monotona creciente y acotada por superiormente por b_1
Se tiene entonces que la sucesión $\{b_n\}$ es monotona creciente y acotada por inferiormente por a_1
por lo tanto existen los limites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

por otro lado $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leq b_n$ por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \ \Rightarrow\ a \leq b$$

Vamos a probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

Sea $x \in [a, b]$ entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ es decir $x \in I_n$ por tanto $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$[a, b] \subset I_n$$

por lo tanto

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Supongamos ahora que

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ \Rightarrow\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ a_n \leq y \leq b_n$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq y \leq \lim_{n\to\infty} b_n \;\Rightarrow\; a \leq y \leq b$$

por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a,b]$$

en consecuencia

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$$

Si suponemos ahora que

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\; b - a = 0 \;\Rightarrow\; a = b$$

por lo anterior se tiene

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

□

Teorema 6. ***Bolzano Weierstrass*** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada. Entonces existen $A,\ B\ \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$A \leq a_n \leq B$$

Vamos a contruir una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$
Sea $a_{n_1} = a_1$.
Consideramos el intervalo cerrado $[a_1, b_1] = [A, B]$
llamemosle I_1 y lo divido en dos partes iguales,

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right]$$

en ambos existen una infinidad de elementos de $\{a_n\}$ tomemos en uno de estos subintervalos un elemento de $\{a_n\}$ y nombremosle a_{n_2} de tal manera que $n_2 > n_1$ a este subintervalo llamemosle $I_2 = [a_2, b_2]$ y notemos que

$$I_1 \subset I_2 \quad y \quad long\ ([a_2,b_2]) = \frac{1}{2} long\ ([a_1,b_1])$$

Vamos ahora a dividir en dos partes iguales I_2,

$$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad \left[\frac{a_2+b_2}{2},\ b_2\right]$$

en ambos existen una infinidad de elementos de $\{a_n\}$ tomemos en uno de estos subintervalos un elemento de $\{a_n\}$ y nombremosle a_{n_3} de tal manera que $n_3 > n_2$ a este subintervalo llamemosle $I_3 = [a_3, b_3]$ y notemos que

$$I_2 \subset I_3 \quad y \quad long\ ([a_3,b_3]) = \frac{1}{2} long\ ([a_2,b_2]) = \frac{1}{4} long\ ([a_1,b_1])$$

continuando con este proceso contruimos una sucesión $\{I_k\}$ tal que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

y cada uno de estos subintervalos $I_k = [a_k, b_k]$ contiene a_{n_k} con $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ de esta manera a_{n_k} es una subsucesión de a_n y cada subintervalo I_k tiene longitud

$$long\ ([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{k-1}} long\ ([a_1, b_1])$$

Según el principio de intervalos encajados

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_k = \{L\}$$

Decimos que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$$

pues $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $L \in I_k$ y también $a_{n_k} \in I_k$ por lo que

$$|a_{n_k} - L| < long\ ([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{k-1}} long\ ([a_1, b_1])$$

la cual es tan pequeña como se desee a medida que k es grande, por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$$

□

Lema 1. *Si $\{n_k\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales entonces*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad n_k \geq k$$

Demostración. La prueba es por inducción matemática
Tenemos que para $k = 1$ se tiene $n_1 \geq 1$ se cumple
supongamos que

$$n_k \geq k$$

a partir de ahi tenemos que

$$n_{k+1} > n_k \geq k$$

de lo anterior se tiene que $n_k > k + 1$ ó $n_k = k + 1$ en cualquier caso

$$n_{k+1} \geq k + 1$$

□

Teorema 7. *Toda sucesión de Cauchy es convergente*

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces es una sucesión acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}$ hacia L. Vamos a probar que $\{a_n\}$ converge hacia L
Sea $\epsilon > 0$. Si $\{a_n\}$ es de Cauchy

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; m, n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

y como $\{a_{n_k}\}$ converge a L

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; k > n_2 \;\Rightarrow\; |a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ entonces

$$\begin{aligned} m \geq n_0 \;&\Rightarrow\; m \geq n_1 \;\; y \;\; n_m \geq m \geq n_1 \;\; y \;\; n_m \geq m \geq n_2 \\ &\Rightarrow\; |a_m - a_{n_m}| < \frac{\epsilon}{2} \;\; y \;\; |a_{n_m} - L| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow\; |a_m - a_{n_m}| + |a_{n_m} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\Rightarrow\; |a_m - a_{n_m} + a_{n_m} - L| < \epsilon \\ &\Rightarrow\; |a_m - L| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

□

Numerabilidad

Definición 2. *Sea A un conjunto y n un número natural positivo. Diremos que A tiene n elementos si existe una función biyectiva*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$

En este caso escribiremos

$$|A| = n$$

El símbolo $|A|$ se lee el número de elementos de A, también se dice la cardinalidad de $|A|$.

Definición 3. *Sean A, B conjuntos. Decimos que A y B tienen el mismo cardinal si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso denotamos*

$$|A| = |B|$$

Definición 4. *Sea A un conjunto. Decimos que*
(a) A es finito, si tiene el mismo cardinal que $\{1, 2, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.
(b) A es numerable, si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.
(c) A es contable, si es finito o numerable.
(d) A es no-numerable, si no es contable.
(e) A es infinito, si no es finito

Lema 2. *Un conjunto A no vacío es numerable si, y sólo si, existe $g : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos que A es numerables y sea $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva. Sea $b \in A$ fijo. La función $g : \mathbb{N} \to A$ definida por

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= a \ \ \forall\, a \in \ A \\ g(n) &= b \ \ \forall\, n \in \ \mathbb{N} \setminus \ f(A) \ \ (si\ f(A) \neq \mathbb{N}) \end{aligned}$$

es claramente sobreyectiva.
Supongamos ahora que existe $g : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva. La función $f : A \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = a\}$$

es inyectiva ☐

Teorema 8. *Todo subconjunto infinito E, de un conjunto numerable A, es numerable*

Demostración. Como A es numerable, existe una biyección

$$f : \mathbb{N} \to A$$

Ahora se define la función $g : \mathbb{N} \to E$ recursivamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(1) &= f\left(\min\left(f^{-1}(E)\right)\right) \\ g(2) &= f\left(\min\left(f^{-1}(E)\right) \setminus \{g(1)\}\right) \\ &\ \vdots \\ g(n) &= f\left(\min\left(f^{-1}(E)\right) \setminus \{g(1), g(2), \ldots, g(n-1)\}\right) \end{aligned}$$

Para ver que g es inyectiva, supongamos que $m \neq n$ (digamos $m < n$). Debe ocurrir que $g(m) \neq g(n)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g(n) &\in f\left(\min\left(f^{-1}(E)\right) \setminus \{g(1), g(2), \ldots, g(n-1)\}\right) \\ &= E \setminus \{g(1), g(2), \ldots, g(n-1)\} \\ &\subset E \setminus \{g(m)\} \end{aligned}$$

Entonces $g(m) \neq g(n)$.
Para ver que g es sobre, supongamos $e \in E$. Entonces $e = f(N)$, para algún $N \in \mathbb{N}$ (f es sobre). Tenemos que

$$f^{-1}(f(\{1, 2, ..., -N\}) \cap E) \subset f^{-1}(f(\{1, 2, ..., -N\}) = \{1, 2, ..., N\}$$

por lo que podemos ordenar los elementos de $f^{-1}(f(\{1, 2, ..., -N\}) \cap E)$ de la siguiente manera

$$f^{-1}(f(\{1, 2, ..., -N\}) \cap E) = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$$

Como $e = f(N)$, tenemos que $n_k = N$. Además por construcción

$$\begin{aligned} g(1) &= f(n_1) \\ g(2) &= f(n_2) \\ &\ \vdots \\ g(k) &= f(n_k) = f(N) = e \end{aligned}$$

entonces $g(k) = e$, por lo que g es inyectiva ☐

Proposición 1. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Es decir que si I es un conjunto numerable y A_i es un conjunto numerable para cada $i \in I$, entonces el conjunto*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

es un conjunto numerable.

Demostración. Podemos suponer que $I \neq \emptyset \neq A_I$. Existen funciones

$$g : \mathbb{N} \to I, \quad f_i : \mathbb{N} \to A_i, \; \forall \; i \in I$$

sobreyectivas.
Definimos $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ dada por

$$h(m, n) = f_{g(n)}(m)$$

Veamos que h es sobreyectiva. Dado $a \in A$, elegimos $i \in I$ tal que $a \in A_i$, entonces elegimos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$g(n) = i \quad y \quad f_i(m) = a$$

Al ser $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numerable se puede construir una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y en consecuencia existe también una función de $\mathbb{N}$ sobre A. Por tanto A es numerable □

Teorema 9. *(Teorema de Banach). Si M y N son conjuntos, y $f : M \to N$ y $g : N \to M$ funciones, entonces existen $A \subset M$ y $B \subset N$ tales que $f(A) = B$ y $g(N - B) = M - A$*

Demostración. Consideremos la función $\varphi : P(M) \to P(M)$ dada por

$$\varphi(C) = M - (g(N - f(C)))$$

Si probamos que φ tiene un punto fijo, es decir que existe $A \in P(M)$ tal que $\varphi(A) = A$, entonces A y $B = f(A)$ satisfacen la tesis. En efecto

$$\begin{aligned} A &= \varphi(A) \\ &= M - (g(N - f(A))) \\ &= M - (g(N - B)) \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que

$$g(N - B) = M - A$$

Basta entonces probar que φ tiene un punto fijo.
Veamos primero φ es monótona creciente en $(P(M), \subset)$.
Sean $A_1, A_2 \in P(M)$ tales que $A_1 \subset A_2$, entonces tenemos la siguiente situación

$$\begin{aligned} f(A_1) \subset f(A_2) &\Rightarrow N - f(A_1) \supset N - f(A_2) \\ &\Rightarrow g(N - f(A_1)) \supset g(N - f(A_2)) \\ &\Rightarrow M - g(N - f(A_1)) \subset M - g(N - f(A_2)) \\ &\Rightarrow \varphi(A_1) \subset \varphi(A_2). \end{aligned}$$

Notemos ahora que
$$\Gamma = \{G \in P(M) \mid \varphi(G) \subset G\} \neq \emptyset$$
Esto es cierto pues $M \in \Gamma$. Sea $A = \bigcap_{G \in \Gamma} G$. Queremos ver que $A \in \Gamma$ con lo que $\varphi(A) \subset A$.
Sabemos que $A \subset G, \forall\ G \in \Gamma$. De aquí que $\varphi(A) \subset \varphi(G), \quad \forall\ G \in \Gamma$ por ser φ monótona creciente. Además, por la definición de Γ, obtenemos que $\varphi(A) \subset G, \quad \forall\ G \in \Gamma$. Por lo tanto $\varphi(A) \subset A$.
Resta ver que $A \subset \varphi(A)$. Como $\varphi(A) \subset A$ y φ es monótona creciente, tenemos que $\varphi(\varphi(A)) \subset \varphi(A)$. Luego $\varphi(A) \in \Gamma$. Es decir, $\varphi(A)$ es uno de los G que participan de la definición de A y entonces $A \subset \varphi(A)$.
Luego, existe $A \in P(M)$ tal que $A = \varphi(A)$ □

Teorema 10. *(Teorema de Cantor-Bernstein). Dados dos conjuntos M y N. Si existen funciones $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que f y g son inyectivas, entonces existe una biyección de M a N.*

Demostración. Vamos a construir una función biyectiva $h : M \to N$. Por el teorema de Banach, existen $A \subset M$ y $B \subset N$ tales que $f(A) = B$ y $g(N - B) = M - A$. Sea $\psi : (M - A) \to (N - B)$ la función inversa de g restringida a $N - B$, y sea $h : M \to N$ definida por
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \psi(x) & si \quad x \in M - A \end{cases}$$
Veamos que h es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in M$, con $x_1 \neq x_2$. Si $x_1, x_2 \in A$, tenemos que $f(x_1) \neq f(x_2)$ por ser f inyectiva y entonces $h(x_1) \neq h(x_2)$. Si $x_1, x_2 \in M - A$, tenemos que $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$ por ser ψ biyectiva y entonces $h(x_1) \neq h(x_2)$. Por último, si $x_1 \in A$ y $x_2 \in M - A$, sucede que $f(x_1) \in B$ y $\psi(x_2) \in N - B$, por lo que resulta
$$f(x_1) = h(x_1) \neq h(x_2) = \psi(x_2)$$
luego h es inyectiva.
Probemos ahora que h es sobre. Sea $y \in N$. Si $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Es decir, existe $x \in M$ tal que $h(x) = y$. Si $y \in N - B$, entonces $g(y) \in M - A$, luego $\psi(g(y)) = y$. Es decir, $h(g(y)) = y$, por lo que h resulta ser sobre.
Hemos probado entonces que existe $h : M \to N$ biyectiva □