Reducción de Integral Riemann-Stieltjes a Suma Finita

Teorema 1. *Sea F una función escalonada definida en $[a, b]$ con salto S_k en t_k , donde los puntos $t_1, ..., t_n$ son las correspondientes a una partición definida sobre $[a, b]$ donde $a = t_1, t_2, ..., t_n = b$.*
Sea f una función definida en $[a, b]$ de manera que por lo menos una de las funciones f ó F es contínua a la derecha de t_k y una por lo menos contínua a la izquierda de t_k, entonces $\int_a^b f(x)\ dF(x)$ existe y se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\ dF(x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_k)F_k$$

Demostración. Tenemos que la integral se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\ dF(x) = \int_a^{t_1} f(x)\ dF(x) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\ dF(x) + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{b} f(x)\ dF(x)$$

donde cada integral de la forma $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\ dF(x)$ con $1 \leq k \leq n$, cumple

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\ dF(x) = f(c_k)\ [F(c_k^+) - F(c_k^-)]$$

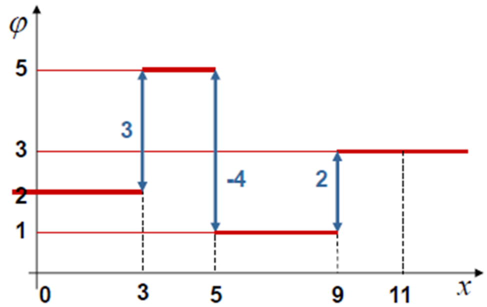
con $1 \leq k \leq n$ y $t_{k-1} < c_k < t_k$, quedando la integral

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dF(x) &= \int_a^{t_1} f(x)\ dF(x) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\ dF(x) + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{b} f(x)\ dF(x) \\
&= f(c_1)\ [F(t_1^+) - F(t_1^-)] + f(c_2)\ [F(t_2^+) - F(t_2^-)] + \cdots + f(c_n)\ [F(t_n^+) - F(t_n^-)] \\
&= f(c_1)S_1 + f(c_2)S_2 + f(c_3)S_1 + \cdots + f(c_n)F_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)S_i
\end{aligned}$$

□

Ejemplo Calcular $\int_0^{11} f(x)\ dF(x)$ para $f(x) = x^2$ y

$$F(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq 3 \\ 5 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ 1 & si \quad 5 < x \leq 9 \\ 3 & si \quad 9 < x \end{cases}$$



Solución En este caso

$$\begin{aligned}\int_0^{11} x^2 dF(x) &= f(3)[F(3^+) - F(3^-)] + f(5)[F(5^+) - F(5^-)] + f(9)[F(9^+) - F(9^-)] \\ &= f(3)\left[\lim_{x\to 3^+} F(x) - \lim_{x\to 3^-} F(x)\right] + f(5)\left[\lim_{x\to 5^+} F(x) - \lim_{x\to 5^-} F(x)\right] + f(9)\left[\lim_{x\to 9^+} F(x) - \lim_{x\to 9^-} F(x)\right] \\ &= f(3)\left[\lim_{x\to 3^+} 5 - \lim_{x\to 3^-} 2\right] + f(5)\left[\lim_{x\to 5^+} 1 - \lim_{x\to 5^-} 5\right] + f(9)\left[\lim_{x\to 9^+} 3 - \lim_{x\to 9^-} 1\right] \\ &= f(3)[5-2] + f(5)[1-5] + f(9)[3-1] \\ &= (3)^2[3] + (5)^2[-4] + (9)^2[2] \\ &= 27 - 100 + 162 = 89\end{aligned}$$

Una de las funciones escalonadas más simple es la función parte entera. Su valor en x es, precisamente el mayor entero que satisface las desigualdades

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Ejemplo Si $F(x) = [x]$ entonces para cada entero k se tiene

$$F(k^+) - F(k^-) = 1$$

por tanto

$$\int_0^n x^2 d[x] = \sum_{i=1}^{n} f(k)[F(k^+) - F(k^-] = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Teorema 2. *Cada suma finita puede expresarse como una integral de Riemann-Stieltjes. De hecho, dada una suma finita*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

definimos f en $[0, n]$ como sigue:
$f(x) = a_i$ si $i - 1 < x \leq i$ $(i = 1, ..., n)$, $f(0) = 0$.
Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x) d[x]$$

en donde $[x]$ es el mayor entero $\leq x$.

Demostración. La función parte entera es una función escalonada continua por la derecha y con salto igual a 1 en cada entero. La función f es continua por la izquierda en $1, 2, ..., n$ entonces aplicamos el teorema anterior □

Teorema 3. *Fórmula de sumación de Euler. S i f tiene derivada f' continua en $[a, b]$, tenemos*

$$\sum_{i=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\ dx + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\ dx$$

Demostración. Sabemos que

$$\int_1^n f(x) d[x] = \sum_{i=1}^{n} f(k) \tag{1}$$

Por otro lado según la integración por partes

$$\int_1^n f(x)\ d[x] = f(n)n - f(1)1 - \int_1^n [x]\ df(x) = f(n)n - f(1)1 - \int_1^n [x]\ f'(x)\ dx \tag{2}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\ dx &= \int_1^n \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\ dx - \int_1^n [x]\ f'(x)\ dx \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n) - \frac{1}{2}\ f(1) - \int_1^n f(x)\ dx - \left[n f(n) - f(1) - \int_1^n f(x)\ d[x]\right] \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n) - \frac{1}{2}\ f(1) - \int_1^n f(x)\ dx - n f(n) + f(1) + \int_1^n f(x)\ d[x] \\
&= -\frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{2} f(1) - \int_1^n f(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n} f(k)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(1) - \int_1^n f(x)\ dx + \int_1^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\ dx$$

□

Ejemplo Utilizar la integral por partes de Riemann-Stieltjes para deducir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{1}{x}\ d[x] + 1 \\
&= -\int_1^n [x]\ dx^{-1} + n^{-1}[n] - 1^{-1}[1] + 1 \\
&= \int_1^n x^{-1}\ dx - \int_1^n x^{-1}\ dx + \int_1^n \frac{[x]}{x^2}\ dx + 1 \\
&= \log\ n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2} + 1
\end{aligned}$$