Teorema de Aproximación de Weierstrass

Teorema 1. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein $(\beta_{f,n})$ converge uniformemente a f en $[0,1]$*

Teorema 2. *de aproximación de Weierstrass*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge uniformemente a f en $[a,b]$

Demostración. Sea $\rho : [0,1] \to [a,b]$ la función dada por

$$\rho(t) = (1-t)a + tb$$

Aplicando el **Teorema 1** a la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g = f \circ \rho$ obtenemos que

$$\beta_{f,n} \to g \quad en \quad C[0,1]$$

La función

$$p_n : \beta_{f,n} \circ \rho^{-1}$$

es un polinomio y cumple

$$\|p_n - f\|_\infty = \max_{s\in[a,b]} |p_n(s) - f(s)| = \max_{s\in[a,b]} |\beta_{f,n}(\rho^{-1}(s)) - g(\rho^{-1}(s))| = \max_{t\in[0,1]} |\beta_{f,n}(t) - g(t)| = \|\beta_{f,n} - g\|_\infty$$

en consecuencia

$$p_n \to f \quad en \quad C[a,b]$$

$\square$

El Teorema de Stone-Weierstrass

Sea X un espacio métrico.

Definición 1. *Un subconjunto A de X es denso en X si $\overline{A} = X$, es decir, si para todo $x \in X$ existe una sucesión (a_k) en A tal que*

$$a_k \to x \quad en \ X$$

Denotamos por $\mathbb{R}[t]$ al conjunto de todos los polinomios

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

con coeficientes reales.
El **Teorema 1** afirma que el conjunto de funciones polinomiales en $[a,b]$

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \{p|_{[a,b]} \mid p \in \mathbb{R}[t]\}$$

es denso en $[a,b]$

Teorema 3. *Stone-Weierstrass*
Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $C[K,\mathbb{R}]$ con las siguientes propiedades

a) $\lambda\ \varphi + \mu\psi \in \mathcal{A}$ *para cualquiera* $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $\varphi\ \psi \in \mathcal{A}$ *para cualquiera* $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$

c) $1 \in \mathcal{A}$

d) Dados $x_1 \neq x_2$ *en* K*, existe* $\varphi \in \mathcal{A}$ *tal que* $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C[K,\mathbb{R}]$, es decir, dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ existe una sucesión (φ_k) de funciones en $\mathcal{A}$ que convergen uniformemente a f en K.

Para demostrar el teorema de Stone-Weierstrass usaremos los siguientes cuatro lemas

1.

Lema 1. *Dados $x_1 \neq x_2$ en K y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe $\psi \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\psi(x_1) = c_1 \quad y \quad \psi(x_2) = c_2$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Como el deteminante

$$\begin{vmatrix} \psi(x_1) & 1 \\ \psi(x_2) & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

existen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \lambda\psi(x_1) + \mu = c_1 \\ \lambda\psi(x_2) + \mu = c_2 \end{aligned}$$

De las propiedades (a) y (c) se sigue que la función

$$\psi = \lambda\psi + \mu 1 \in \mathcal{A}$$

Las igualdades anteriores afirman que

$$\begin{aligned} \psi(x_1) = c_1 \\ \psi(x_2) = c_2 \end{aligned}$$

□

2.

Lema 2. *La cerradura $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ en $C[K,\mathbb{R}]$ también tiene las propiedades (a), (b) y (c)*

Demostración. Propiedad (a) Dadas $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$ existen $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{A}$ tales que

$$\varphi_k \to \varphi \quad y \quad \psi_k \to \psi \quad en\ C[K, \mathbb{R}]$$

esto quiere decir que $\forall\ \epsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_k - \varphi\|_\infty < \frac{\epsilon}{2|\lambda|} \quad \forall\ k \geq N_1$$

$$\|\psi_k - \psi\|_\infty < \frac{\epsilon}{2|\mu|} \quad \forall\ k \geq N_2$$

Si hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\lambda\varphi_k + \mu\psi_k - (\lambda\varphi + \mu\psi\|_\infty &= \|\lambda\varphi_k - \lambda\varphi + \mu\psi_k + \mu\psi\|_\infty \\
&\leq \|\lambda\varphi_k - \lambda\varphi\|_\infty + \|\mu\psi_k + \mu\psi\|_\infty \\
&= |\lambda|\ \|\varphi_k - \varphi\|_\infty + |\mu|\ \|\psi_k + \psi\|_\infty \\
&< |\lambda|\ \frac{\epsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\ \frac{\epsilon}{2|\mu|} = \epsilon
\end{aligned}$$

para toda $k \geq N$, y obtenemos que $\lambda\varphi_k + \mu\psi_k \to \lambda\varphi + \mu\psi$ por lo tanto

$$\lambda\varphi + \mu\psi \in \overline{\mathcal{A}}$$

Propiedad (b) Dadas $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$ existen $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{A}$ tales que

$$\varphi_k \to \varphi \quad y \quad \psi_k \to \psi \quad en\ C[K, \mathbb{R}]$$

Como toda sucesión convergente esta acotada,existe $C > 0$ tal que $\|\psi_k\|_\infty \leq C$ para toda K. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\|\varphi\psi - \varphi_k\psi_k\|_\infty &= \|\varphi\psi + \varphi\psi_k - \varphi\psi_k - \varphi_k\psi_k\|_\infty \\
&= \|\varphi(\psi - \psi_k) + \varphi_k(\varphi - \varphi_k)\|_\infty \\
&\leq \|\varphi(\psi - \psi_k)\|_\infty + \|\varphi_k(\varphi - \varphi_k)\|_\infty \\
&= \|\varphi\|_\infty\|\psi - \psi_k\|_\infty + \|\varphi_k\|_\infty\|\varphi - \varphi_k\|_\infty \\
&\leq \|\varphi\|_\infty\|\psi - \psi_k\|_\infty + C\|\varphi - \varphi_k\|_\infty
\end{aligned}$$

tomando el límite cuando $k \to \infty$, en ambos lados de la desigualdad obtenemos que $\varphi_k\psi_k \to \varphi\psi$ por lo tanto

$$\varphi\psi \in \overline{\mathcal{A}}$$

$\square$

3. **Lema 3.** *Si* $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$*, entonces* $|\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$

   Demostración. Como φ es continua y K es compacto, se tiene $\varphi(K)$ es acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto $\varphi(k)$ esta contenido en algún intervalo $[a, b]$, existe entonces una sucesión de polinomios (p_k) que converge uniformemente a la función valor absoluto en el intervalo $[a, b]$, es decir $\forall\ \epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

   $$|p_n(t) - |t|| < \epsilon \quad \forall\ k \geq k_0 \ \ \forall\ t \in [a, b]$$

   Esta desigualdad en particular se cumple para $t = \varphi(x)$ con $x \in K$. Por tanto

   $$\|p_k \circ \varphi - |\varphi|\|_\infty = \max_{x \in K} |p_k(\varphi(x)) - |\varphi(x)|| < \epsilon \quad \forall\ k \geq k_0$$

   es decir $p_k \circ \varphi \to |\varphi|$ en $C[k, \mathbb{R}]$ Por otra parte el **lemma 2** asegura que, para cualquier polinomio $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$, se cumple que

   $$p \circ \varphi = \alpha_0 + \alpha_1 \varphi + \cdots + \alpha_m \varphi^m \in \overline{\mathcal{A}}$$

   por tanto, $|\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$ □

4. **Lema 4.** *Si* $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$ *entonces* $\max\{\varphi, \psi\}$, $\min\{\varphi, \psi\} \in \overline{\mathcal{A}}$

   Demostración. Basta observar que

   $$\max\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|)$$
   $$\min\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|)$$

   Como $\overline{\mathcal{A}}$ satisface la propiedad (a), el lemma anterior implica que $\max\{\varphi, \psi\}$, $\min\{\varphi, \psi\} \in \overline{\mathcal{A}}$

   □

Demostración. **Del teorema de Stone Weierstrass**
Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\epsilon > 0$.
El **lema 1** asegura que, para cada par de puntos $x, y \in K$, podemos escoger $\varphi_{x,y} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\varphi_{x,y}(x) = f(x) \quad y \quad \varphi_{x,y}(y) = f(y)$$

Fijemos $x \in K$. Como $\varphi_{x,y} - f$ es continua y $\varphi_{x,y}(y) = f(y) = 0$, $\exists\ \delta_y > 0$ tal que

$$|\varphi_{x,y}(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall\ z \in B_K(y, \delta_y) \tag{1}$$

y, como K es compacto, existen $y_1, ..., y_m \in K$ tales que

$$K \subset B_K(y_1, \delta_{y_1}) \cup B_K(y_2, \delta_{y_2}) \cup \cdots \cup B_K(y_m, \delta_{y_m})$$

Sea $\varphi_x = \max\{\varphi_{x,y_1}, \varphi_{x,y_2} \ldots, \varphi_{x,y_m}\}$. El **lema 4** asegura que $\varphi_x \in \overline{\mathcal{A}}$.
Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B_K(y_i, \delta_{y_i})$ por la desigualdad (1) tenemos

$$\varphi_x(z) - f(z) > -\epsilon \tag{2}$$

Por otra parte, dado que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ para todo $y \in K$, se tiene que $\varphi_x = f(x)$ y, como $\varphi_x - f$ es continua, existe $\gamma_x > 0$ tal que

$$|\varphi_x(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall\ z \in B_K(x, \gamma_x) \tag{3}$$

De la compacidad de K se sigue que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset B_K(x_1, \gamma_{x_1}) \cup B_K(x_2, \gamma_{x_2}) \cup \cdots \cup B_K(x_n, \gamma_{x_n})$$

Sea $\varphi = \min\{\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots, \varphi_{x_n}\}$. **El lema 4** asegura que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$.
Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B_X(x_i, \gamma_{x_i})$, usando la desigualdad (3) obtenemos que

$$\varphi(z) - f(z) < \epsilon \quad \forall\ z \in K \tag{4}$$

Y, como la desigualdad (2) vale para toda $x \in K$, se tiene además que

$$\varphi(z) - f(z) > -\epsilon \quad \forall\ z \in K \tag{5}$$

Las desigualdades (4) y (5) implican que

$$\|\varphi - f\|_\infty < \epsilon$$

$\square$

Por consiguiente, dado que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, concluimos que $f \in \overline{\mathcal{A}}$