Teorema de Arzelá (Aplicaciones)

Recordemos que $\mathcal{H}$ es un subconjunto acotado de $C(K,\mathbb{R}^n)$ si existen $f_0 \in \mathcal{H}$ y $C>0$ tales que

$$\|f-f_0\|_\infty = \max_{z\in k}\|f(z)-f_0(z)\| \leq C \quad \forall\, f\in\mathcal{H}$$

Corolario 1. *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C(K,\mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto en $C(K,\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $C(K,\mathbb{R}^n)$*

Demostración. ($\Rightarrow$)
Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto relativamente compacto en $C(K,\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de Arzelá $\mathcal{H}$ es equicontinuo y, la cerradura de $\mathcal{H}$ es compacta y por tanto acotada en $C(K,\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, $\mathcal{H}$ es acotado en $C(K,\mathbb{R}^n)$
($\Leftarrow$)
Inversamente, supongamos que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $C(K,\mathbb{R}^n)$. Entonces existen $f_0\in\mathcal{H}$ y $C>0$ tales que

$$\|f-f_0\|_\infty = \max_{z\in k}\|f(z)-f_0(z)\| \leq C \quad \forall\, f\in\mathcal{H}$$

En consecuencia $\mathcal{H}(z)$ está acotado en $\mathbb{R}^n$ para todo $z\in K$ y, por el teorema de Heine-Borel, $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}^n$ para todo $z\in K$. El teorema de Arzelá asegura que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $C(K,\mathbb{R}^n)$ □

Definición 1. *Una función lineal $T: V\to W$ entre espacios de Banach se llama un operador compacto si, para cualquier sucesión acotada (v_k) en V, la sucesión $T(v_k)$ contiene una subsucesión convergente en W.*

Proposición 1. *Sea $\mathcal{K}:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. El operador de Volterra $\mathfrak{B}: C[a,b]\to C[a,b]$ dado por*

$$\mathfrak{B}\ \mathfrak{f}(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)\ dy$$

es un operador compacto.

Demostración. Sea (f_k) una sucesión en $C[a,b]$ tal que $\|f_k\|_\infty\leq c$ para algún $c\in\mathbb{R}$. Entonces

$$|\mathfrak{B}\ \mathfrak{f_k}(x)| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x,y)f_k(y)|\ dy \leq (b-a)\|\mathcal{K}\|_\infty\|f_k\|_\infty \leq (b-a)\|\mathcal{K}\|_\infty c$$

para todo $x\in[a,b]$ y todo $k\in\mathbb{N}$. Por tanto,

$$\|\mathfrak{B}\ \mathfrak{f_k}(x)\|_\infty \leq (b-a)\|\mathcal{K}\|_\infty c$$

para todo $k\in\mathbb{N}$, es decir

$$\mathcal{H} = \{\mathfrak{B}\ f_k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

es acotado en $C[a,b]$. Más aun, como $\mathcal{K}$ es uniformemente continua, para cada $\epsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1)-\mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)c} \quad si \quad \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta_1$$

En consecuencia, si

$$|x_1 - x_2| < \delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty c}\right\}$$

y $x_1 \leq x_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{B}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{k}}(x_1) - \mathfrak{B}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{k}}(x_2)| &= \left|\int_a^{x_1} \mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y) f_k(y)\ dy - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}(x_1, y) f_k(y)\ dy\right| \\
&\leq \int_a^{x_1} |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)|\ |f_k(y)|\ dy + \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{K}(x_1, y)|\ |f_k(y)|\ dy \\
&< (b-a)\frac{\epsilon}{2(b-a)c} c + \frac{\epsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty c}\|\mathcal{K}\|_\infty c = \epsilon
\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $C[a, b]$ y, en consecuencia, $(\mathfrak{B}\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{k}})$ contiene una subsucesión convergente en $C[a, b]$ □