Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición 1. *Un subconjunto A de X es **relativamente compacto** en X si su cerradura $\overline{A}$ en X es compacta.*

Los subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.

Corolario 1. *Un subconjunto A de un espacio métrico completo X es relativamente compacto en X si y sólo si es totalmente acotado.*

Sean (K, d_k) un espacio métrico compacto y (X, d_X) un espacio métrico. Consideremos el espacio de funciones continuas

$$C(K,X) = \{f : K \to X \mid f \text{ es continua}\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty = \max_{z \in K} d_X(f(z), g(z))$$

Definición 2. *Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C(K,X)$ es equicontinuo en el punto $z_0 \in K$ si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ϵ y de z_0) tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,*

$$d_X(f(z), f(z_0)) < \epsilon \quad si \quad d_K(z, z_0) < \delta$$

$\mathcal{H}$ es equicontinuo si lo es en todo punto punto de K.

Denotaremos por

$$B_\infty(f_0, r) = \{f \in C(K,X) \mid d_\infty(f, f_0) < r\}$$

a la bola abierta en $C(K,X)$ con centro f_0 y radio r.

Teorema 1. ***Arzelá-Ascoli***
Sea K un espacio métrico compacto y X un espacio métrico completo. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C(K,X)$ es relativemente compacto en $C(K,X)$ si y solo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y los conjuntos

$$\mathcal{H}(z) = \{f(z) \mid f \in \mathcal{H}\}$$

son relativamente compactos en X para cada $z \in K$

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongamos que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $C(K,X)$. Entonces $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. En consecuencia, dada $\epsilon > 0$, existen $g_1, ..., g_m \in \mathcal{H}$ tales que

$$\mathcal{H} \subset B_\infty\left(g_1, \frac{\epsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup B_\infty\left(g_m, \frac{\epsilon}{3}\right)$$

Por tanto, $g_i(z) \in \mathcal{H}(z)$ para $i = 1, ..., m$, y

$$\mathcal{H}(z) \subset B_X\left(g_1(z), \frac{\epsilon}{3}\right) \cup \cdots \cup B_X\left(g_m(z), \frac{\epsilon}{3}\right) \ \forall \ z \in K$$

Esto prueba que $\mathcal{H}(z)$ es totalmente acotado.
Como X es completo, según resultados anteriores $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$.

Por otra parte como K es compacto, cada g_i es uniformemente continua. En consecuencia, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cualesquiera $y, z \in K$,

$$d_X(g_i(y), g_i(z)) < \frac{\epsilon}{3} \quad si \ d_K(y,z) < \delta_i$$

Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_m\}$. Dada $f \in \mathcal{H}$ existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$d_\infty(f, g_i) < \frac{\epsilon}{3}$$

tenemos

$$d_X(f(y), f(z)) \leq d_X(f(y), g_i(y)) + d_X(g_i(y), g_i(z)) + d_X(g_i(z), f(z)) < \epsilon$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo.
($\Leftarrow$)
Supongamos ahora que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y que $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$. Queremos ver que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $C(K, X)$. Como X es completo, $C(K, X)$ también lo es, vamos a probar que $\mathcal{H}$ es totalmente acotado.
Sea $\epsilon > 0$. Para cada $z \in K$ tomemos $\delta_z > 0$ tal que, $\forall \ f \in \mathcal{H}$,

$$d_X(f(y), f(z)) < \frac{\epsilon}{4} \quad si \ d_K(y,z) < \delta_z \tag{1}$$

Como K es compacto, existen $z_1, ..., z_m \in K$ tales que

$$K \subset B_K(z_1, \delta_{z_1}) \cup \cdots \cup B_K(z_m, \delta_{z_m}) \tag{2}$$

y, como cada $\mathcal{H}(z_i)$ es totalmente acotado, existen $x_1, ..., x_k \in X$ tales que

$$\mathcal{H}(z_1) \cup \cdots \cup \mathcal{H}(z_m) \subset B_X\left(x_1, \frac{\epsilon}{4}\right) \cup \cdots \cup B_X\left(x_k, \frac{\epsilon}{4}\right) \tag{3}$$

Denotemos por S al conjunto (finito) de todas las funciones

$$\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., k\}$$

para cada $\sigma \in S$ definimos

$$\mathcal{H}_\sigma = \{f \in \mathcal{H} \mid f(z_i) \in B_X\left(x_{\sigma_i}, \frac{\epsilon}{4}\right) \quad \forall \ i = 1, ..., m\}$$

Se sigue de (3) que, para cada $f \in \mathcal{H}$ y cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $\sigma_i \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$f(z_i) \in B\left(x_{\sigma_i}, \frac{\epsilon}{4}\right)$$

En consecuencia

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} \mathcal{H}_\sigma \tag{4}$$

Probaremos ahora que cada $\mathcal{H}_\sigma$ está contenida en una bola de radio ϵ con centro en $\mathcal{H}$.
Sean $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$ y sea $z \in K$. Se sigue de (2) que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$d_K(z, z_i) < \delta_{z_i}$$

y, en consecuencia, (1) implica que

$$d_X(h(z), h(z_i)) < \frac{\epsilon}{4}$$

para toda $h \in \mathcal{H}$. Por tanto,

$$d_X(f(z), g(z)) \leq d_X(f(z), f(z_i)) + d_X(f(z_i), x_{\sigma(i)}) + d_X(g(z_i), x_{\sigma(i)}) + d_X(g(z), g(z_i)) < \epsilon$$

Tomando el máximo sobre toda $z \in K$ concluimos que

$$d_\infty(f, g) < \epsilon$$

para toda $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$. En consecuencia, para cualquier elección de $g_\sigma \in \mathcal{H}_\sigma$, se cumple que

$$\mathcal{H}_\sigma \subset B_\infty(g_\sigma, \epsilon)$$

de (3) y (4) se sigue que

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} B_\infty(g_\sigma, \epsilon)$$

Por tanto, $\mathcal{H}$ es totalmente acotado $\square$