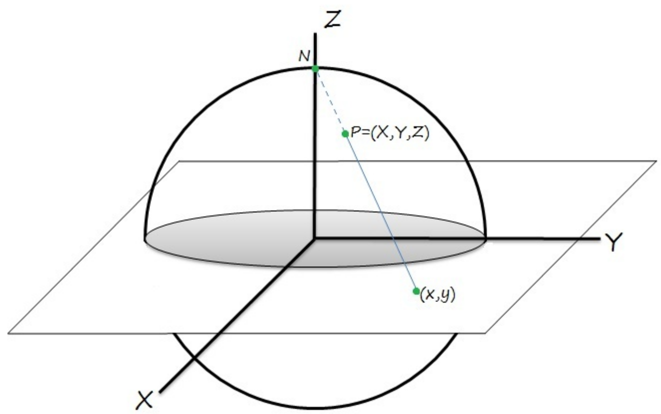
Proyección Estereográfica

Dada una esfera unitaria S^2 y el plano complejo $\mathbb{C}$. Tomando el punto $N = e_3 = (0, 0, 1)$ y haciendo una proyección al plano complejo, se tiene que a cada punto de la esfera le asociamos un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. Al punto $N = e_3$ le asociamos al ∞

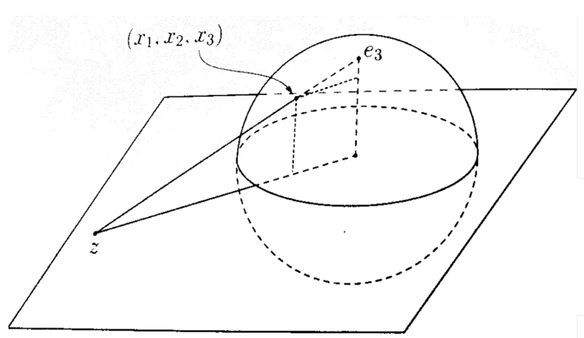


La esfera unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1\}$$

llamada esfera de Riemann es el modelo requerido para incluir el punto al infinito.
Para asociar cada punto z del plano complejo $\mathbb{C}$ con un punto (x_1, x_2, x_3) de S^2 usamos la siguiente idea.

1. Se toma un punto $e_3 = (0, 0, 1) \in S^2$ y desde e_3 se proyecta una línea hacia un punto cualquiera $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$. Esta línea cruza el plano complejo en un único punto z

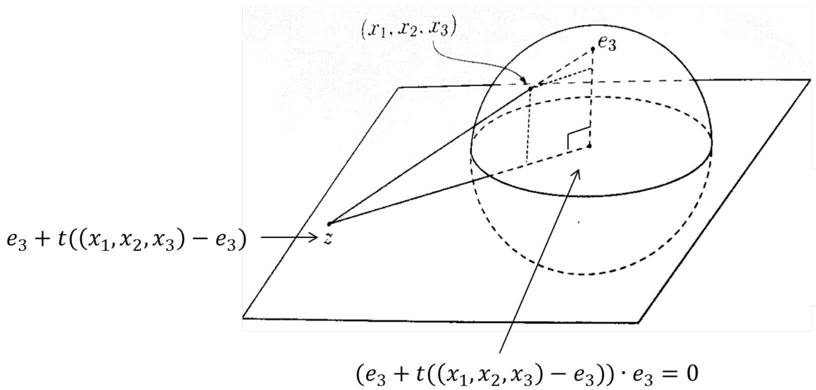


2. Vamos a busca la asociación del punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ al punto (x_1, x_2) en el plano que representaría al punto $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$
   (a) La recta de e_3 al punto (x_1, x_2, x_3) se puede parametrizar

$$e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Para esta recta existe un valor t para el cual

$$[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0$$



es decir

$$[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0 \;\Rightarrow\; [(0,0,1) + t((x_1, x_2, x_3) - (0,0,1))] \cdot (0,0,1) = 0$$

$$\Rightarrow\; [tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)] \cdot (0,0,1) = 0$$

$$\Rightarrow\; 1 + t(x_3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow\; t = \frac{1}{1 - x_3}$$

(c) Con este valor de t buscamos el punto z del plano complejo asociado al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, se tiene entonces

$$e_3 + \frac{1}{1 - x_3}((x_1, x_2, x_3) - e_3) = e_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3}\right)$$

$$= (0,0,1) + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right)$$

(d) Podemos entonces definir la función $\psi : S^2 - \{e_3\} \to \mathbb{C}$ como

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right)$$

3. Ahora vamos a encontrar una asociación del punto z del plano complejo al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, para esto se tiene
(a) $z = \psi(x_1, x_2, x_3)$

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1$
(c) Entonces

$$|z|^2 = \left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

por lo tanto

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \ \Rightarrow \ \boxed{x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}}$$

Por otro lado

$$z + \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) + \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow \ z + \overline{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}}$$

finalmente

$$z - \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) - \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow \ z - \overline{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}}$$

por tanto la función $\pi : \mathbb{C} \to S^2 - \{e_3\}$ esta dada por

$$\pi(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

haciendo corresponder ∞ con el polo e_3 y con las funciones ψ y π se obtiene una biyección de S^2 con $\mathbb{C}$. A esta biyección se le llama proyección estereográfica

Teorema 1. *Si z, z' son las imagenes estereográficas de los puntos de la esfera P_1, P_2, respectivamente, entonces la distancia que hay entre P_1 y P_2 es*

$$\frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

Demostración. Si $P_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $P_2 = (x_1', x_2', x_3')$ se tiene que

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = 2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')$$

ahora nos fijamos en la parte de $x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$ y teniendo en cuenta que

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)} \quad y \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3' &= \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}\right)\left(\frac{z'+\overline{z'}}{|z'|^2+1}\right)++\left(\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}\right)\left(\frac{z'-\overline{z'}}{i(|z'|^2+1)}\right)+\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\left(\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}\right)\\
&= \frac{2z\overline{z'}+2\overline{z}z'+|zz'|^2-|z|^2-|z'|^2+1}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{-2(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})+(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{-2(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})+(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= 1-\frac{2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2 &= 2-2\left(1-\frac{2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\right)\\
&= 2-2\left(1\frac{-2|z-z'|^2+(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\right)\\
&= \frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}
\end{aligned}
$$

De manera que

$$
\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}
$$

$\square$