Compacidad

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados tienen una propiedad fundamental: cualquier sucesión de puntos en ellos contiene una subsucesión convergente. En general, no cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico tiene esta propiedad. A los subconjuntos que la tienen se les llama compactos. Este término fue introducido por Fréchet en 1906.
Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X:

Definición 1. *Una **cubierta** de A en X es una familia $\mathfrak{C} = \{X_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos de X tal que*

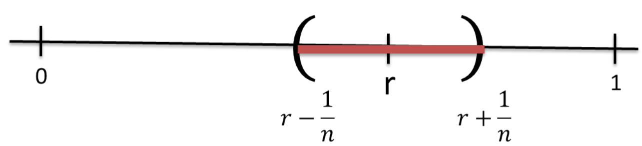
$$A \subset \bigcup_{i \in I} X_i$$

*Si además X_i es abierto en X para toda $i \in I$, se dice que $\mathfrak{C}$ es una **cubierta abierta** de A en X.*

Ejemplo Sea $A = [0, 1]$ y sea

$$\mathfrak{C} = \left\{ B\left(r, \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q} \right\}$$

En este caso $\mathfrak{C}$ consiste de los intervalos abiertos $\left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right)$ que colectivamente cubren a $[0, 1]$



Por lo que $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de A.

Un subconjunto $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ que a su vez es cubierta de A se llama una subcubierta de $\mathfrak{C}$

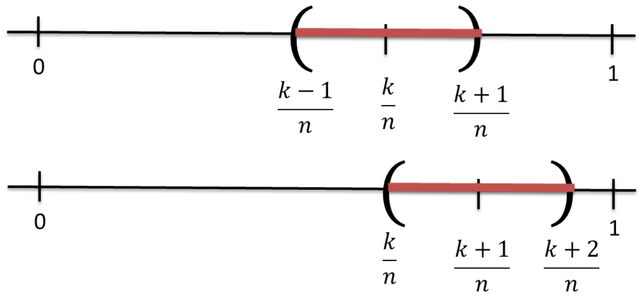
Ejemplo Sea $A = [0, 1]$ y sea

$$\mathfrak{C} = \left\{ B\left(r, \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q} \right\}$$

Sea n un número natural fijo. Entonces los conjuntos

$$\mathfrak{C}' = \left\{ \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \cdots, n \right\}$$

forman una colección de $n + 1$ conjuntos de $\mathfrak{C}$. Estos conjuntos cubren colectivamente A, ya que se superponen de la siguiente manera



Entonces $\mathfrak{C}'$ forma una subcubierta abierta de A.

Definición 2. *Un subconjunto K de X es compacto si cada cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{X_i \mid i \in I\}$ de K en X contiene una subcubierta finita, es decir, si existen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que*

$$K \subset X_{i_1} \cup X_{i_2} \cup \cdots \cup X_{i_m}$$

Proposición 1. *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces toda sucesión (x_k) de elementos de K contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K*

Demostración. Sea (x_k) una sucesión en K. Probaremos primero que existe un punto $y_0 \in K$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, la bola abierta $B_X(y_0, \epsilon)$ con centro en y_0 y radio ϵ contiene alguna subsucesión de (x_k). Argumentando por contradicción, supongamos que para cada $y \in K$ existe $\epsilon_y > 0$ tal que $B_X(y, \epsilon_y)$ no contiene ninguna subsucesión de (x_k). Entonces existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \notin B_X(y, \epsilon_y) \quad \forall\ k \geq k_y$$

Como K es compacto y $\mathfrak{C} = \{B_X(y, \epsilon_y) \mid y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, existen $y_1, ..., y_m \in K$ tales que

$$K \subset B_X(y_1, \epsilon_{y_1}) \cup \cdots \cup B_X(y_m, \epsilon_{y_m})$$

Esto implica que $x_k \notin K$ para todo $k \geq \text{máx}\{k_{y_1}, ..., k_{y_m}\}$, lo cual es falso.
En consecuencia, existe $y_0 \in K$ tal que toda bola abierta con centro en y_0 contiene a una subsucesión de (x_k).
Escogemos para cada $j \in \mathbb{N}$ un punto $x_{k_j} \in B_X\left(y_0, \dfrac{1}{j}\right)$ tal que $k_j > k_{j-1}$. La sucesión (x_{k_j}) es una subsucesión de (x_k) que converge a y_0 □

Proposición 2. *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de X. Sea $x_0 \in \overline{K}$, existe una sucesión (x_k) en K que converge a x_0 en X. Según lo anterior contiene una subsucesión (x_{j_k}) que converge a un punto y_0 en K y por tanto debe ocurrir que $x_0 = y_0 \in K$. Esto prueba que K es cerrado □

Definición 3. *Un subconjunto A de un espacio métrico X es acotado si existen $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que $A \subset B_X(x, \epsilon)$*

Proposición 3. *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es acotado*

Demostración. Para ver esto, fijemos un punto $x_0 \in X$. El conjunto $\mathfrak{C} = \{B_X(x_0, k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$k \subset B_X(x_0, k_1) \cup \cdots \cup B_X(x_0, k_m)$$

Sea $k_0 = \max\{k_1, ..., k_m\}$. Entonces $K \subset B_X(x_0, k_0)$, es decir, K es acotado $\square$