## Compacidad (parte dos)

**Ejemplo** La bola cerrada

$$\overline{B}_{\ell_2} = \left\{ (x_n) \in \ell_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1 \right\}$$

no es compacta en $\ell_2$

*Demostración.* Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos $\epsilon_k \in \ell_2$ a la sucesión cuyo k-ésimo término es 1 y todos los demás términos son 0. Claramente $\epsilon_k \in \overline{B}_{\ell_2}(0,1)$. Observa que

$$\|e_j - e_k\|_2 = \sqrt{2} \ \ \forall\ j \neq k$$

Supongamos que una subsucesión $(e_{k_j})$ converge a $e$ en $\ell_2$.

Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|e_{k_j} - e\|_2 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \ \forall\ j \geq j_0$. En consecuencia,

$$\|e_{k_j} - e_{k_i}\|_2 \leq \|e_{k_j} - e\|_2 + \|e - e_{k_i}\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \ \ \forall\ i, j \neq j_0$$

lo cual es imposible. Esto prueba que $(e_k)$ no contiene ninguna subsucesión convergente y por lo tanto $\overline{B}_{\ell_2}(0,1)$ no es compacta $\square$

**Proposición 1.** *Sea $K$ un subconjunto compacto de $X$. Si $C \subset K$ es cerrado en $X$, entonces $C$ es compacto*

*Demostración.* Sea C un subconjunto cerrado de un conjunto compacto K. Si $\mathfrak{C} = \{U_i \mid i \in I\}$ es una cubierta abierta de C en X, entonces $\mathfrak{C}' = \{U_i \mid i \in I\} \cup \{X - C\}$ es una cubierta abierta de K en X. Como K es compacto, existen $U_{i_1}, ..., U_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que

$$k \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m} \cup (X - C)$$

En consecuencia, $C \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m}$. Esto prueba que C es compacto $\square$

**Proposición 2.** *Si $\phi : X \to Y$ es continua y $K$ es un subconjunto compacto de $X$, entonces $\phi(k)$ es un subconjunto compacto de $Y$.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{C} = \{V_i \mid i \in I\}$ una cubierta abierta de $\phi(k)$ en Y. Como $\phi$ es continua $\phi^{-1}(V_i)$ es abierto en X. Por tanto $\mathfrak{C}' = \{\phi^{-1}(V_i \mid i \in I)\}$ es una cubierta de K en X y, como K es compacto, existen $\phi^{-1}(V_{i_1}), ..., \phi^{-1}(V_{i_m}) \in \mathfrak{C}'$ tales que $K \subset \phi^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup \phi^{-1}(V_{i_m})$. En consecuencia, $\phi(K) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_m}$. Esto prueba que $\phi(K)$ es compacto. $\square$

**Proposición 3.** *Si $K$ es un espacio métrico compacto y $\phi : K \to X$ es continua entonces la función $\phi$ es acotada.*

*Demostración.* Según lo anterior $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de X. Según resultados anteriores $\phi(K)$ es acotado, es decir, $\phi$ es una función acotada $\square$

**Proposición 4.** *El cubo cerrado*

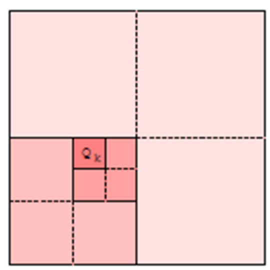
$$Q = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [-r, r],\ i = 1, ...n\}, \quad r > 0$$

*es compacto*

*Demostración.* Supongamos que Q no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{U_i \mid i \in I\}$ de Q en $\mathbb{R}^n$ tal que ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de $Q$.
Si subdividimod a Q en $2^n$ cubos cerrados de lado r, se cumple que al menos uno de ellos, llamemoslo $Q_1$ no esta contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. Subdividamos ahora $Q_1$ en $2^n$ cubos cerrados de lado $\dfrac{r}{2}$ y repitamos este argumento para obtener una sucesión decreciente de cubos cerrados

$$Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots Q_k \supset \cdots$$

tales $Q_k$ es un bubo de lado $\dfrac{r}{2^{k-1}}$ y $Q_k$ no esta contenido en la unión de ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$




Si denotamos por $\xi^k = (\xi_1^k, ..., \xi^k)$ al centro de $Q_k$. Entonces

$$|\xi^k - x_i| < \frac{r}{2^k} \quad \forall\ x = (x_1, ..., x_N) \in Q_k$$

En particular, como $\xi^j \in Q_k$ para $j \geq k$, se tiene que

$$|\xi_i^k - \xi_i^j| < \frac{r}{2^k} \quad \forall\ j \geq k,\ \forall\ i = 1, ..., n$$

Por tanto para cada $i = 1, ..., n$ la sucesión $(\xi_i^k)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia existe $\xi_i \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_i^k \to \xi_i$ en $\mathbb{R}$. Pasando al límite cuando $j \to \infty$ en la desigualdad obtenemos

$$|\xi_i^k - \xi_i| < \frac{r}{2^k} \quad \forall\ j \geq k,\ \forall\ i = 1, ..., n$$

Como $\xi_i^k \in [-r, r]$, se tiene que $\xi_i \in [-r, r]$. Es decir $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in Q$. Y como $\mathfrak{C}$ es cubierta de Q, existe $U_* \in \mathfrak{C}$ tal que $\xi \in U_*$.
Dado que $U_*$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\xi, \epsilon) \subset U_*$. Ahora bien, si $x \in Q_k$ se tiene

$$\|x - \xi\| \leq \|x - \xi^k\| + \|\xi^k - \xi\| \leq \frac{r\sqrt{n}}{2^k} + \frac{r\sqrt{n}}{2^k} = \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}}$$

En consecuencia,

$$Q_k \subset B(\xi, \epsilon) \subset U_* \quad si\ \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \epsilon$$

Esto contradice que $Q_k$ no puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. Esto demuestra que Q es compacto. $\square$