Compacidad (parte tres)

Teorema 1. *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes*

(a) X es compacto

(b) Toda sucesión en X contiene una subsucesión que converge en X

(c) X es completo y totalmente acotado

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Ya se ha probado
$(b) \Rightarrow (c)$. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, x_j) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ k, j \geq k_1$$

Si X satisface (b) entonces (x_k) contiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. Es decir existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{k_j}, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ k_j \geq k_2$$

Si tomamos $k_0 = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ se tiene que

$$d(x_k, x) \leq d(x_{k_j}, x_k) + d(x_{k_j}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall\ k_j, k \geq k_0$$

En consecuencia (x_k) converge a x en X. Esto prueba que X es completo.
Supongamos ahora que X no es totalmente acotado. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas de radio ϵ_0.

$$X \not\subset B_X(x_1, \epsilon_0) \cup B_X(x_2, \epsilon_0) \cup \cdots \cup B_X(x_m, \epsilon_0)$$

con los elementos que no cubren las bolas, vamos construyendo una sucesión de la siguiente manera

$$x_2 \notin B_X(x_1, \epsilon_0) \ \Rightarrow \ d(x_2, x_1) \geq \epsilon_0$$

$$x_3 \notin B_X(x_1, \epsilon_0) \cup B_X(x_2, \epsilon_0) \ \Rightarrow \ d(x_3, x_1) \geq \epsilon_0, \quad d(x_3, x_2) \geq \epsilon_0$$

Por consiguiente, podemos escoger, inductivamente, una sucesión de puntos $x_k \in X$ tales que

$$x_k \notin B_X(x_1, \epsilon_0) \cup \cdots \cup B_X(x_{k-1}, \epsilon_0) \quad d_X(x_j, x_k) \geq \epsilon_0 \ \forall j \neq k$$

Y, en consecuencia, ninguna subsucesión de (x_k) es de Cauchy. Esto implica que (x_k) no contiene ninguna subsucesión convergente. Es decir, Si X no es totalmente acotado, entonces (b) no se cumple.
$(c) \Rightarrow (a)$ Argumentando por contradicción. Supongamos que X es completo y totalmente acotado pero no es compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta

$$U = \{U_i \mid i \in I\}$$

que no contiene ninguna subcubierta finita. Como X es totalmente acotado esta contenido en un número finito de bolas abiertas de radio 1.

$$X \subset B_X(x_1, 1) \cup B_X(x_2, 1) \cup \cdots \cup B_X(x_m, 1)$$

Como X no puede ser cubierto con un número finito de elementos de $U = \{U_i \mid i \in I\}$, por tanto existe un punto $x_0 \in X$ tal que

$$B_X(x_0, 1) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

Esto es $B_X(x_0, 1)$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U.
Como X es totalmente acotado y $B_X(x_0, 1) \subset X$ entonces $B_X(x_0, 1)$ es totalmente acotado, esta contenido en un número finito de bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ cuyos centros estan en $B_X(x_0, 1)$. Por consiguiente,

$$\exists\ x_1 \in B_X(x_0, 1) \ \ni\ B_X\left(x_1, \frac{1}{2}\right) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

es decir no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U. De este modo construimos, inductivamente, una sucesión (x_k) tal que

$$\exists\ x_k \in B_X\left(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}}\right) \ \ni\ B_X\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

es decir, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U.
Ahora bien para toda $j \geq k$, se tiene entonces que

$$d_X(x_k, x_j) \leq d_X(x_k, x_{k+1}) + \cdots + d_X(x_{j-1}, x_j) < \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

es decir, la sucesión (x_k) es de Cauchy. Como X es completo, esta sucesión converge a un punto x^* en X. Haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad obtenemos que

$$d_X(x_k, x^*) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Por otra parte, como $x^* \in X$, existe $U^* \in U$ tal que $x^* \in U^*$. Como U^* es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x^*, \epsilon) \subset U^*$. Sea k tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, para todo $x \in B_X\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$, se tiene que

$$d_X(x, x^*) \leq d_X(x, x_k) + d_X(x^*, x_k) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \epsilon$$

es decir

$$B_X\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right) \subset B_X(x^*, \epsilon) \subset U^*$$

Esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $B_X\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U. $\square$