Continuidad en Espacios Métricos

La noción de continuidad de una función entre espacios métricos es formalmente identica a la de continuidad de una función entre espacios euclidianos.

Definición 1. *Sean (X, d_x) y (Y, d_y) espacios métricos. Una función $\phi : X \to Y$ es continua en el punto $x_0 \in X$ si, dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de x_0 y de ϵ) tal que*

$$d_y(\phi(x), \phi(x_0)) < \epsilon \quad si \quad d_x(x, x_0) < \delta$$

Decimos que ϕ es continua si lo es en todo punto de X.

La continuidad de ϕ depende de las métricas que estamos considerando en X y Y.

Ejemplo La identidad $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es una función continua para cualesquiera $p,\ r \in [1, \infty]$.

Demostración. Considerando en $\mathbb{R}^n_r$ la métrica inducida por la norma r

$$d_{\mathbb{R}^n_r}(x, x_0) = \|x - x_0\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{0_1}|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Y considerando en $\mathbb{R}^n_p$ la métrica inducida por la norma p

$$d_{\mathbb{R}^n_p}(x, x_0) = \|x - x_0\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{0_1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos que para cualesquiera $p, r \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(n \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{1}{r}} \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n^{\frac{1}{r}} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \left(\underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

De ambas desigualdades concluimos que

$$\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}} \|x\|_p \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in [1, \infty], \quad r \in [1, \infty)$$

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ definimos $\delta = n^{-\frac{1}{r}}\epsilon$ si $r \in [1, \infty)$ o $\delta = \epsilon$ si $r = \infty$. De lo anterior

$$d_{\mathbb{R}^n_r}(x, x_0) = \|x - x_0\|_r < \epsilon \quad si \quad d_{\mathbb{R}^n_p}(x, x_0) = \|x - x_0\|_p < \delta$$

esto prueba que $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es continua. □

Ejemplo Sea $\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

Vamos a mostrar que ϕ continua

Demostración. Considerando en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d_{\mathbb{R}}(x, x_0) = |x - x_0|$$

Y considerando en $C[0,1]$ la métrica

$$d_{C[0,1]}(f, f_0) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)|_p$$

tenemos que para $f, f_0 \in C[0,1]$

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}}(\phi(f), \phi(f_0)) &= |\phi(f) - \phi(f_0)| \\
&= \left| \int_0^1 f(x)\ dx - \int_0^1 f_0(x)\ dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 [f(x) - f_0(x)]\ dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - f_0(x)|\ dx \\
&\leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)|\ dx \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| \int_0^1 dx \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)|
\end{aligned}$$

Por tanto si escogemos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$$

se tiene

$$d_{\mathbb{R}}(\phi(f), \phi(f_0)) < \epsilon \quad si \quad d_{C[0,1]}(f, f_0) \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$$

esto prueba que $\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}^n_r$ es continua. □

Definición 2. *Una función $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo si ϕ es continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es continua. Se dice que X y Y son homeomorfos si existe un homeomeorfismo entre ellos.*

Los ejemplos anteriores muestran que

$$id : \mathbb{R}_p^n \to \mathbb{R}_r^n$$

es un homeomerfismo para cualesquiera $p,\ r \in [1, \infty]$.

Proposición 1. *Sean $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ funciones entre espacios métricos.*
(a) Si ϕ y ψ son continuas entonces la composición $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.

Demostración. (a) Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Como ψ es continua en $y_0 = \phi(x_0)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_z(\psi(y), \psi(y_0)) < \epsilon \quad si \quad d_y(y, y_0) < \gamma$$

Y como ϕ es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_y(\phi(x), \phi(x_0)) < \gamma \quad si \quad d_x(x, x_0) < \delta$$

En consecuencia

$$d_z(\psi(\phi(x)), \psi(\phi(x_0))) < \epsilon \quad si \quad d_x(x, x_0) < \delta$$

es decir, $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.

$\square$