Definición 1. *Una función $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo si ϕ es continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es continua. Se dice que X y Y son homeomorfos si existe un homeomeorfismo entre ellos.*

Proposición 1. *Sean $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ funciones entre espacios métricos.*
(a) Si ϕ y ψ son continuas entonces la composición $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.
(b) Si ϕ es un homeomorfismo, entonces ψ es continua si y solo si $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.
(c) Si ψ es un homeomorfismo, entonces ϕ es continua si y solo si $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.

Demostración. (a) Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Como ψ es continua en $y_0 = \phi(x_0)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_z(\psi(y), \psi(y_0)) < \epsilon \quad si \quad d_y(y, y_0) < \gamma$$

Y como ϕ es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_y(\phi(x), \phi(x_0)) < \gamma \quad si \quad d_x(x, x_0) < \delta$$

En consecuencia

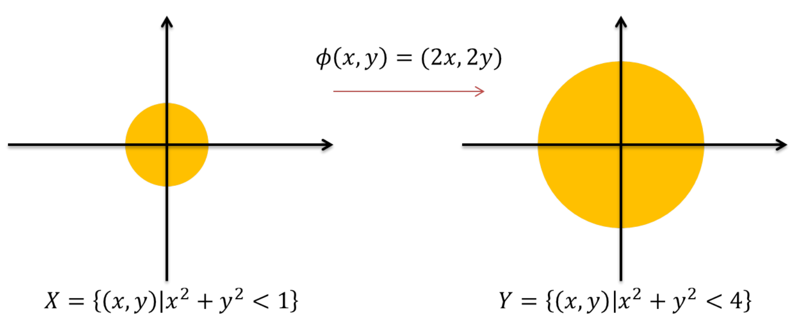
$$d_z(\psi(\phi(x)), \psi(\phi(x_0))) < \epsilon \quad si \quad d_x(x, x_0) < \delta$$

es decir, $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.
(b) Si ϕ es un homeomorfismo, de la parte (a) se sigue que $\psi \circ \phi$ es continua si y solo si $(\psi \circ \phi) \circ \phi^{-1} = \psi$ lo es.
(c) Si ψ es un homeomorfismo, entonces $\psi \circ \phi$ es continua si y solo si $\psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi) = \phi$ lo es. □

Ejemplo Dados los conjuntos

$$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad y \quad Y = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$$

Vamos a comprobar que la función $\phi : X \subset \mathbb{R}^2 \to Y \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x, y) = (2x, 2y)$ es un homeomorfismo



Demostración. 1. ϕ es continua pues si consideramos

$$d_X(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_Y(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
d_Y(\phi(x_1,y_1),\phi(x_2,y_2)) &= d_Y((2x_1,2y_1),(2x_2,2y_2)) \\
&= \|(2x_1-2x_2,2y_1-2y_2)\|_\infty \\
&= \text{máx}\{|2x_1-2x_2|,|2y_1-2y_2|\} \\
&\leq \sqrt{(2x_1-2x_2)^2+(2y_1-2y_2)^2)} \\
&= 2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)} \\
&= 2\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_2 \\
&= 2d_X((x_1,y_1),(x_2,y_2))
\end{aligned}$$

Entonces de acuerdo a lo anterior escogemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ y tenemos que

$$d_Y(\phi(x_1,y_1),\phi(x_2,y_2)) < \epsilon \quad si, \quad d_X((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$$

por lo tanto ϕ es continua

2. ϕ es inyectiva pues

$$\begin{aligned}
\phi(x_1,y_1)=\phi(x_2,y_2) &\Rightarrow (2x_1,2y_1)=(2x_2,2y_2) \\
&\Rightarrow 2x_1=2x_2 \quad y \quad 2y_1=2y_2 \\
&\Rightarrow x_1=x_2 \quad y \quad y_1=y_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es inyectiva.
Ahora bien para ver que ϕ es sobreyectiva se tiene que dada $q=(x,y)\in Y$ existe $p=\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)\in X$, que satisface

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+y^2)<\frac{1}{4}(4)=1$$

y también

$$\phi(p)=\phi\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)=\left(2\frac{x}{2},2\frac{y}{2}\right)=(x,y)=q$$

por lo tanto ϕ es sobreyectiva

3. Definimos la función $\phi^{-1}:Y\to X$ dada por $\phi^{-1}(x,y)=\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)$ y vamos a comprobar que

ϕ^{-1} es continua, en este caso

$$
\begin{aligned}
d_Y\left(\phi^{-1}\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2}\right),\phi^{-1}\left(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)\right) = & \\
&= \left\|\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2},\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right)\right\|_\infty \\
&= \text{máx}\left\{\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|,\left|\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right|\right\} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-\frac{y_2}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}d_x((x_1,y_1),(x_2,y_2))
\end{aligned}
$$

de acuerdo a lo anterior podemos escoger $\delta=\sqrt{2}\epsilon$, por lo que

$$d_Y\left(\phi^{-1}\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2}\right),\phi^{-1}\left(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)\right) < \epsilon \quad si \quad d_x((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$$

Se tiene entonces que ϕ es continua, biyectiva y su inversa ϕ^{-1} es continua, por lo que ϕ es un homeomorfismo □

Definición 2. *Una función $\phi : X \to Y$ es Lipchitz continua, si existe $c > 0$ tal que*

$$d_Y(\phi(x),\phi(y)) \leq c \cdot d_X(x,y) \quad \forall\ x,y \in X$$

La constante c se llama una constante de Lipchitz para ϕ