Definición 1. *Una función $\phi : X \to Y$ es Lipchitz continua, si existe $c > 0$ tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq c d_X(x, y) \quad \forall\ x, y \in X$$

La constante c se llama una constante de Lipchitz para ϕ

Ejemplo Vamos a comprobar que la función identidad $id : C_p[0,1] \to C_r[0,1]$ es Lipchitz continua, considerando
en $C_p[0,1]$ la métrica

$$d_p = \|f - g\|_p = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

en $C_r[0,1]$ la métrica

$$d_r = \|f - g\|_r = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Según la proposición

Proposición 1. *Para todo $f \in C^0[a,b]$ se cumple que*

$$\|f\|_s \leq (b-a)^{\frac{r-s}{rs}} \|f\|_r \quad \forall\ 1 \leq s < r < \infty,$$

$$\|f\|_s \leq (b-a)^{\frac{1}{s}} \|f\|_\infty \quad \forall\ 1 \leq s < \infty,$$

Si en la proposición anterior consideramos $p, r \in [1, \infty]$ y $p < r$ se tiene

$$d_p(f,g) = \|f - g\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \|f - g\|_r = d_r(f,g)$$

por lo que existe una constante $c > 0$ tal que

$$d_p(f,g) \leq d_r(f,g)$$

y por lo tanto la identidad $id : C_p[0,1] \to C_r[0,1]$ es Lipchitz continua

Definición 2. *Se dice que una función ϕ es una equivalencia si ϕ es Lipchitz continua y biyectiva y su inversa*

$$\phi^{-1} : Y \to X$$

es Lipchitz continua

Ejemplo En la función identidad $id : C_p[0,1] \to C_r[0,1]$ si consideramos $r = p$, se tiene una función Lipchitz continua, biyectiva y con inversa Lipchitz continua por lo que la función identidad es una equivalencia y también un homeomorfismo.

Proposición 2. *Si una función ϕ es Lipchitz continua entonces ϕ es continua*

Demostración. Sea $c > 0$ una constante Lipchitz para ϕ se tiene entonces

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq c \cdot d_X(x, y) \quad \forall\ x, y \in X$$

ahora bien $\forall\ \epsilon >$ se considera $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$, de manera que

$$\begin{aligned} d_X(x,y) < \delta \ &\Rightarrow\ d_X(x,y) < \frac{\epsilon}{c} \\ &\Rightarrow\ c \cdot d_X(x,y) < \epsilon \\ &\Rightarrow\ d_Y(\phi(x), \phi(y)) < \epsilon \end{aligned}$$

□

Métricas Equivalentes

Definición 3. *Dos métricas d_1 y d_2 en un conjunto X son equivalentes si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que*

$$c_1 \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2 \cdot d_2(x, y) \ \ \forall\ x, y \in X$$

Análogamente, dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ en un espacio vectorial V, son equivalentes si las métricas inducidas son equivalentes, es decir si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \cdot \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2 \cdot \|v\|_2 \ \ \forall\ v \in V$$

Ejemplo Para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(n \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{1}{r}} \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n^{\frac{1}{r}}\ \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \left(\underbrace{\text{máx}}_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

por lo que
(a) $\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}}\ \|x\|_\infty \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ p, r \in [1, \infty)$
(b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.
Para las métricas inducidas

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_\infty = \text{máx}\{|x_i - y_i|,\ i = 1, \ldots, n\}$$

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Se tiene que

$$n^{-\frac{1}{p}} d_2(x, y) = n^{-\frac{1}{p}} \|x - y\|_p \leq \|x - y\|_\infty = d_1(x, y)$$

y también

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_\infty \leq= \|x - y\|_p = d_2(x, y)$$

Bolas abiertas

Definición 4. *Sea* (X, d_X) *un espacio métrico,* $x_0 \in X$ *y* $\epsilon > 0$

(1) *La bola abierta en* X *con centro en* x_0 *y radio* $\epsilon > 0$*, es el conjunto:*

$$B_X(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d_X(x, x_0) < \epsilon\}$$

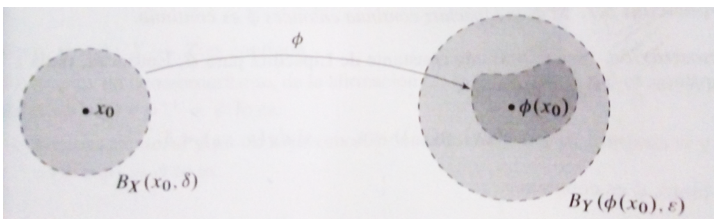
Dados un subconjunto A de X y una función $\phi : X \to Y$, denotamos por

$$\phi(A) = \{\phi(x) \in Y \mid x \in A\}$$

a la imagen de A bajo ϕ. Usando estos conceptos podemos dar una definición de continuidad

Definición 5. *Una función* $\phi : X \to Y$ *es continua en el punto* x_0 *de* X *si dada* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *talque*

$$\phi(B_X(x_0, \epsilon)) \subset B_Y(\phi(x_0), \epsilon)$$



Ejemplo Usando la definición anterior muestre que la función identidad $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es continua

Para ver esto se tiene

$$\begin{aligned}
\phi(x) \in \phi(B_{\mathbb{R}^n_p}(x_0, \delta)) &\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; x \in B_{\mathbb{R}^n_p}(x_0, \delta) \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; d_{\phi(x)\in\mathbb{R}^n_p \;\; y} \;\; (x, x_0) < \delta \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; \|x - x_0\|_p < \delta \\
&\underbrace{\Rightarrow}_{\delta = \frac{\epsilon}{n^{\frac{1}{r}}}} \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; \|x - x_0\|_r \leq n^{\frac{1}{r}} \;\; \|x - x_0\|_p < \epsilon \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; \|x - x_0\|_r < \epsilon \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; d_{\mathbb{R}^n_r}(x, x_0) < \epsilon \\
&\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}^n_r \;\; y \;\; d_{\mathbb{R}^n_r}(\phi(x), \phi(x_0)) < \epsilon \\
&\Rightarrow \phi(x) \in B_{\mathbb{R}^n_r}(\phi(x_0, \epsilon)) \\
&\Rightarrow \phi(B_{\mathbb{R}^n_p}(x_0, \epsilon)) \subset B_{\mathbb{R}^n_r}(\phi(x_0), \epsilon)
\end{aligned}$$