Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea A un subconjunto de X.

Definición 1. *Un punto $x \in X$ se llama un punto interior de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x, \epsilon) \subset A$ El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el interior de A en X y se denota $int_X(A)$, o simplemente $int(A)$. Decimos que A es abierto en X si $A = int(A)$.*

Proposición 1. *En cualquier espacio métrico (X, d_X), la bola abierta*

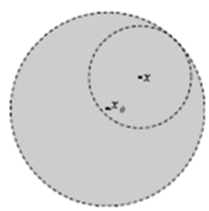
$$B_X(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d_X(x, x_0) < \epsilon\}$$

con centro x_0 y radio $\epsilon > 0$ es un subconjunto abierto de X.

Demostración. Sea $x \in B_X(x_0, \epsilon)$. Escogemos $\delta = \epsilon - d_X(x, x_0) > 0$. Para todo $z \in B_X(x, \delta)$, se cumple que

$$d_X(z, x_0) \leq d_X(z, x) + d_X(x, x_0) < \delta + d_X(x, x_0) = \epsilon$$

es decir, $z \in B_X(x_0, \epsilon)$. Por tanto, $B_X(x, \delta) \subset B_X(x_0, \epsilon)$



Esto muestra que $x \in int(B_X(x_0, \epsilon))$ para todo $x \in B_X(x_0, \epsilon)$. por lo que

$$B_X(x_0, \epsilon) = int(B_X(x_0, \epsilon))$$

□

Corolario 1. *El interior int(A) de cualquier subconjunto A de X es abierto.*

Demostración. Sea $x \in int(A)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x, \epsilon) \subset A$.
Veamos ahora que $B_X(x, \epsilon) \subset int(A)$.
En efecto, según la proposición anterior

$$\forall\ z \in B_X(x, \epsilon) \text{ existe } \delta > 0 \ \ni\ B_X(z, \delta) \subset B_X(x, \epsilon) \subset A$$

Por tanto, $z \in int(A)$ □

Definición 2. *Un punto $x \in X$ se llama un punto de contacto de A si $B_X(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ para toda $\epsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos de contacto de A se llama la cerradura de A en X y se denota $\overline{A}^X$, o simplemente $\overline{A}$. Decimos que A es cerrado en X si $A = \overline{A}$*

Nota que todo punto de A es punto de contacto de A; es decir, $A \subset \overline{A}$.