Conjuntos abiertos, cerrados y funciones continuas

Corolario 1. *El interior int(A) de cualquier subconjunto A de X es abierto.*

Demostración. Sea $x \in \ int(A)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x, \epsilon) \subset A$.
Veamos ahora que $B_X(x, \epsilon) \subset int(A)$.
En efecto, según la proposición anterior

$$\forall\ z \in B_X(x, \epsilon) \ existe\ \delta > 0 \ \ni\ B_X(z, \delta) \subset B_X(x, \epsilon) \subset A$$

Por tanto, $z \in int(A)$ □

Proposición 1. *El interior de un conjunto A, $int(A)$ es el máximo conjunto abierto contenido en A*

Demostración. Sea C un conjunto abierto tal que $C \subset A$. Vamos a ver que $C \subset int(A)$.
Supongamos que $C \not\subset Int(A)$ esto significa que existe $x \in C$ tal que $x \notin Int(A)$.
Como C es abierto $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$B_X(x, \epsilon) \subset A$$

esto significa que $x \in Int(A)$ (contradicción) □

Definición 1. *Un punto $x \in X$ se llama un punto de contacto de A si $B_X(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ para toda $\epsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos de contacto de A se llama la cerradura de A en X y se denota $\overline{A}^X$, o simplemente $\overline{A}$. Decimos que A es cerrado en X si $A = \overline{A}$*

Nota que todo punto de A es punto de contacto de A; es decir, $A \subset \overline{A}$.

Definición 2. *La bola cerrada en X con centro en x_0 y radio ϵ es el conjunto*

$$\overline{B}_X(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d_X(x, x_0) \leq \epsilon\}$$

Proposición 2. $\overline{B}_X(x_0, \epsilon)$ *es un subconjunto cerrado de X*

Demostración. Sea $x \in \overline{\overline{B}_X(x_0, \epsilon)}$. Entonces, $\forall\ \delta > 0$, existe $x_\delta \in \overline{B}_X(x_0, \delta) \cap B_X(x_0, \epsilon)$. De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_\delta) + d(x_\delta, x_0) < \delta + \epsilon \quad \forall\ \delta > 0$$

En consecuencia $d(x, x_0) \leq \epsilon$, es decir, $x \in \overline{B}_X(x_0, \epsilon)$. □

Denotemos por $X \backslash A$ al complemento de A en X, es decir,

$$X \backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

Los abiertos y los cerrados son duales en el siguiente sentido.

Proposición 3. *Para cualquier subconjunto A de un espacio métrico X se cumple que*

$$X\backslash\overline{A} = int(X\backslash A)$$

En consecuencia, A es cerrado en X si y sólo si $X\backslash A$ es abierto en X.

Demostración. Tenemos que $x \in int(X\backslash A)$ si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$, es decir, si y sólo si $x \in X\backslash\overline{A}$.
En consecuencia, si A es cerrado, entonces $X\backslash A = X\backslash\overline{A} = int(X\backslash A)$, es decir $X\backslash A$ es abierto.
Inversamente, si $X\backslash A$ es abierto, entonces $X\backslash A = int(X\backslash A) = X\backslash\overline{A}$ y, en consecuencia, $A = \overline{A}$, es decir, A es cerrado □

Corolario 2. *La cerradura $\overline{A}$ de cualquier subconjunto A de X es cerrado en X.*

Demostración. Sabemos que $int(X\backslash A)$ es abierto en X. En consecuencia, por la proposición anterior, se tiene $\overline{A} = X\backslash int(X\backslash A)$ es cerrado en X. □

Proposición 4. *$\overline{A}$ es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A.*

Demostración. Sea $C \subset X$ tal que C es cerrado en X y $A \subset C$. Supongamos que $\overline{A} \not\subset C$, esto quiere decir que existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin C$. Entonces $X\backslash C$ es un abierto que contiene al punto x y como $A \subset C$, se cumple que $(X\backslash C) \cap A = \emptyset$. Por tanto, x no es punto de contacto de A, lo cual es una contradicción. □