Conjuntos abiertos, cerrados y funciones continuas

Proposición 1. *Si $(V.\|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la cerradura de la bola abierta*

$$B(v_0,\epsilon)=\{v\in V \mid \|v-v_0\|<\epsilon\}$$

es la bola cerrada

$$\overline{B}(v_0,\epsilon)=\{v\in V \mid \|v-v_0\|\le\epsilon\}$$

Demostración. Como $\overline{B}(v_0,\epsilon)$ es cerrado y contiene a $B(v_0,\epsilon)$ se tiene que $\overline{B(v_0,\epsilon)}\subset\overline{B}(v_0,\epsilon)$. Probaremos ahora que $\overline{B}(v_0,\epsilon)\subset\overline{B(v_0,\epsilon)}$. Es decir, probaremos que, para todo $v\in\overline{B}(v_0,\epsilon)$ y $\delta>0$, se cumple que

$$B(v,\delta)\cap B(v_0,\epsilon)\emptyset$$

Sin perder generalidad podemos tomar $\delta<2\epsilon$. El punto

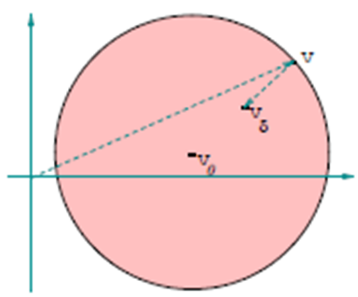
$$v_\delta=v+\frac{\delta}{2\epsilon}(v_0-v)\in V$$

satisface

$$\|v_\delta-v\|=\frac{\delta}{2\epsilon}\|v_0-v\|\le\frac{\delta}{2}<\delta$$

y

$$\|v_\delta-v_0\|=\left(1-\frac{\delta}{2\epsilon}\right)\|v-v_0\|\le\left(1-\frac{\delta}{2\epsilon}\right)\epsilon<\epsilon$$



Por tanto $v_\delta\in B(v,\delta)\cap B(v_0,\epsilon)$ □

Daremos ahora una caracterización de la continuidad en términos de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.
La imagen inversa de un subconjunto B de Y bajo la función $\phi : X \to Y$ es el conjunto

$$\phi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \phi(x) \in B\}$$

Proposición 2. *Sean X y Y espacios métricos, y sea $\phi : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\phi : X \to Y$ es continua*
2. *$\phi^{-1}(U)$ es abierto en X para todo subconjunto abierto U de Y*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$
Sea U un subconjunto abierto de Y. Para cada $x \in \phi^{-1}(U)$ tomemos $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(\phi(x), \epsilon) \subset U$.
Como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \epsilon)$$

Entonces $B_X(x, \delta) \subset \phi^{-1}(U)$.
Esto prueba que $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X.
$2 \Rightarrow 1$
Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como $B_Y(\phi(x), \epsilon)$ es abierta en Y se tiene que $\phi^{-1}(B_Y(\phi(x), \epsilon))$ es abierto en X. En particular, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X x, \delta \subset \phi^{-1}(B_Y(\phi(x), \epsilon))$$

es decir

$$\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \epsilon)$$

Esto prueba que ϕ es continua en x. □

Proposición 3. *Sean X y Y espacios métricos, y sea $\phi : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\phi^{-1}(U)$ es abierto en X para todo subconjunto abierto U de Y*
2. *$\phi^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo subconjunto cerrado C de Y*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$
Sea C un subconjunto cerrado de Y, entonces $Y \backslash C$ es abierto en Y. Por tanto

$$\phi^{-1}(Y \backslash C) = X \backslash \phi^{-1}(C)$$

es abierto en X y por tanto $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en X.
$2 \Rightarrow 1$
Sea U un subconjunto abierto de Y, entonces $Y \backslash U$ es cerrado en Y. Por tanto

$$\phi^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash \phi^{-1}(U)$$

es cerrado en X y por tanto $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X.

□