Convergencia de sucesiones y continuidad

Definición 1. *Una sucesión en un espacio métrico* (X, d) *es una función* $\overline{x} : \mathbb{N} \to X$*. El valor de dicha función en* k *se llama el* k*-ésimo término de la sucesión y se denota por* $x_k = \overline{x}(k)$*. La sucesión se denota por* $\overline{x} = (x_k)$*.*
Decimos que (x_k) *converge a un punto* $x \in X$ *si, dada* $\epsilon > 0$*, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_k, x) < \epsilon$ *para todo* $k \geq k_0$*. El punto* x *se llama el límite de la sucesión* (x_k)*.*

Se denotará

$$x_k \to x \quad en\ X, \quad o\ bien \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x$$

para decir que (x_k) converge a x en X.
Observamos que

$$x_k \to x \quad en\ X \ \Leftrightarrow \ d(x_k, x) \to 0 \quad en\ \mathbb{R}$$

Definición 2. *Una subsucesión de* $\overline{x} = (x_k)$ *es la composición de* $\overline{x}$ *con una función estrictamente creciente* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. Su* j*-ésimo término se denota por* $x_{k_j} = \overline{x}(k(j))$*.*

Proposición 1. *El límite de una sucesión convergente es único*

Demostración. Si $x_k \to x$ y $x_k \to y$ en X entonces

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y) \to 0 \quad en\ \mathbb{R}$$

por tanto, $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$ □

Proposición 2. *Si* (x_k) *converge a* x *en* X *entonces cualquier subsucesión* (x_{k_j}) *converge a* x *en* X

Demostración. Sea (x_{k_j}) una subsucesión de (x_k) y $\epsilon > 0$. Como $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Y, como $x_j \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. Por tanto $d(x_{k_j}, x) < \epsilon$ para todo $j \geq k_0$ □

Definición 3. *Una sucesión* (x_k) *en* X *está acotada si existen* $x \in X$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *tales que* $d(x_k, x) \leq c$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 3. *Toda sucesión convergente está acotada*

Demostración. Si $x_k \to x$ en X entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < 1$ para todo $k > k_0$. Tomando $c = \text{máx}\{d(x_1, x), ..., d(x_{k_0-1}, x), 1\}$ obtenemos que $d(x_k, x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$ □

Daremos ahora una caracterización de la cerradura de un conjunto en términos de sucesiones en dicho conjunto.

Proposición 4. *Sea* A *un subconjunto de* X *y sea* $x \in X$*. Entonces* $x \in \overline{A}$ *si y sólo si existe una sucesión* (x_k) *tal que* $x_k \in A$ *para toodo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $x_k \to x$ *en* X*.*

Demostración. Si $x \in \overline{A}$ entonces existe $x_k \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_k \in A$ y $d(x_k, x) \leq \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_k \to x$ en X.
Sea ahora (x_k) una sucesión de puntos de A tal que $x_k \to x$ en X. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. En particular $x_{k_0} \in B_X(x, \epsilon) \cap A$. Por tanto, $x \in \overline{A}$ □

Podemos caracterizar la continuidad de una función en términos de sucesiones como sigue.

Proposición 5. *$\phi : X \to Y$ es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión (x_k) en X tal que $x_k \to x$ en X se cumple $\phi(x_k) \to \phi(x)$ en Y.*

Demostración. Supongamos que ϕ es continua en x y que $x_k \to x$ en X. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \epsilon)$$

y, como $x_k \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_X(x, \delta)$ para todo $k \geq k_0$. Por tanto

$$\phi(x_k) \in B_Y(\phi(x), \epsilon)$$

para todo $k \geq k_0$. Esto prueba que $\phi(x_k) \to \phi(x)$.

Inversamente, supongamos que ϕ no es continua. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un punto $x_k \in B_X\left(x, \dfrac{1}{k}\right)$ tal que $\phi(x_k) \notin B_Y(\phi(x), \epsilon_0)$. En consecuencia, (x_k) converge a x en X pero $(\phi(x_k))$ no converge a $\phi(x)$ en Y. $\square$