Convergencia de sucesiones y continuidad

Proposición 1. *$\phi : X \to Y$ es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión (x_k) en X tal que $x_k \to x$ en X se cumple $\phi(x_k) \to \phi(x)$ en Y.*

Ejemplo Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k}$$

vamos a mostrar que f_k converge a la función constante $f(x) = 0$, considerando la métrica

$$d_\infty(g,h) = \sup\ \{|g(x) - h(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned} d_\infty(f_k(x), 0) &= \sup\ \{|f_k(x) - 0| \mid x \in [0,1]\} \\ &= \sup\ \left\{ \left| \frac{x^k}{k} \right| \mid x \in [0,1] \right\} \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Dada $\epsilon > 0$ si consideramos $k_0 = \dfrac{1}{\epsilon}$, entonces para $k \geq k_0$ se cumple

$$d_\infty(f_k(x), 0) = \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} = \epsilon$$

por tanto $f_k \to 0$

Ejemplo Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k}$$

vamos a mostrar que f_k converge a la función constante $f(x) = 0$, considerando la métrica

$$d_1(g,h) = \int_0^1\ \{|g(x) - h(x)|\ dx$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned} d_1(f_k(x), 0) &= \int_0^1\ |f_k(x) - 0|\ dx \\ &= \int_0^1\ \left| \frac{x^k}{k} \right|\ dx \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \\ &< \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Dada $\epsilon > 0$ si consideramos $k_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, entonces para $k \geq k_0$ se cumple

$$d_1(f_k(x), 0) = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k_0^2} = \epsilon$$

por tanto $f_k \to 0$

Ejemplo Si consideramos la función identidad $id : C_1[0,1] \to C_\infty[0,1]$ según lo anterior se concluye que la identidad es continua

Ejemplo Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & si \quad \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

vamos a mostrar que f_k converge a la función constante $f(x) = 0$ considerando la métrica

$$d_1(g, h) = \int_0^1 \;\{|g(x) - h(x)| \; dx$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned} d_1(f_k(x), 0) &= \int_0^1 \; |f_k(x) - 0| \; dx \\ &= \int_0^1 \; |1 - kx| \; dx \\ &= \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

Dada $\epsilon > 0$ si consideramos $k_0 = \dfrac{1}{2\epsilon}$, entonces para $k \geq k_0$ se cumple

$$d_1(f_k(x), 0) = \frac{1}{2k} < \frac{1}{2k_0} = \epsilon$$

por tanto $f_k \to 0$

Ejemplo Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & si \quad \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

si f_k converge a la función $f(x)$, considerando la métrica

$$d_\infty(g, h) = \sup \; \{|g(x) - h(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned} d_\infty(f_k(x), 0) &= \sup \; \{|f_k(x) - 0| \mid x \in [0,1]\} \\ &= \sup \; \{|1 - kx|\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dada $\epsilon = \frac{1}{2}$ se tiene

$$d_\infty(f_k(x), 0) = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$$

por tanto f_k no converge

Ejemplo Si consideramos la función identidad $id : C_1[0,1] \to C_\infty[0,1]$ según lo anterior se concluye que la identidad es no es continua

Ejemplo Considerando $(\mathbb{R}, d_a)$ donde

$$d_A = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

En este caso se tiene que $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado ya que

$$d(x, y) \leq 1$$

Sin embargo la sucesión $x_k = k$ no tiene ninguna subsucesión convergente porque para cualquier m,n que cumpla $m \neq n$ se tiene

$$d(m, n) = \frac{|m-n|}{1+|m-n|} \geq \frac{1}{2}$$