Criterio de Cauchy

Definición 1. *Una sucesión (x_k) en X es de Cauchy si, dada $\epsilon > 0$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_X(x_k, x_j) < \epsilon \quad \forall\ k, j \geq k_0$$

Proposición 1. *Sea (X, d) un espacio métrico y (x_k) una sucesión en X.*

1. *Si (x_k) converge, entonces (x_k) es una sucesión de Cauchy*
2. *Si (x_k) es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada*
3. *Si (x_k) es una sucesión de Cauchy y alguna subsucesión de (x_{k_j}) converge a x, entonces $x_k \to x$*

Demostración.

1. Suponagamos que $x_k \to x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Entonces, si $m, n \geq k_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

2. Sea k_0 tal que si $m, n \geq k_0$ entonces $d(x_m, x_n) < 1$. Si tomamos

$$M = \text{máx}\{d(x_1, x_{k_0}), d(x_2, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_{k_0}), 1\}$$

entonces, para todo k, $d(x_k, x_{k_0}) \leq M$. Por tanto, (x_k) está acotada

3. Supongamos que $x_{k_j} \to x$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que, si $j \geq n_0$,

$$d(x_{k_j}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Como (x_k) es da Cauchy, existe n_1 tal que, si $m, n \geq n_1$,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Si tomamos $k_0 = \text{máx}\{k_j, n_1\}$, entonces $k \geq k_0$ implica

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

El primer inciso de la proposición anterior establece que ser una sucesión de Cauchy es una condición necesaria para que una sucesión sea convergente; pero esta condición no es suficiente en todo espacio métrico, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo Considere el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, es decir,

$$d(r,s) = |r-s|$$

para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Q}$. Considere la sucesión

$$r_1 = 1,\ r_2 = 1{,}4,\ r_3 = 1{,}41,\ r_4 = 1{,}414, \cdots$$

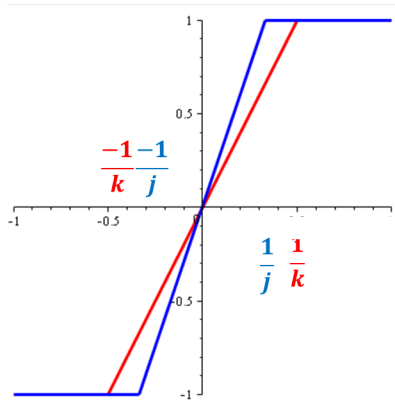
En $\mathbb{R}$, dicha sucesión convergería a $\sqrt{2}$, y por tanto es de Cauchy en $\mathbb{R}$. También es de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, por lo que (r_n) no converge en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo La sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_k = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & si \quad -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & si \quad \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es de Cauchy en $C_1[-1,1]$ pues para $j \geq k$ se tiene

$$j \geq k \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{j}$$



$$d_1(f_j(x) - f_k(x)) = \int_{-1}^{1} |f_j(x) - f_k(x)|\, dx$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |f_j(x) - f_k(x)|\, dx &= 2\left(\int_0^1 |f_j(x) - f_k(x)|\, dx\right) \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{1}{j}} |jx - kx|\, dx + \int_{\frac{1}{j}}^{\frac{1}{k}} |1 - kx|\, dx\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2j}\right) \\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{j} \\
&= \frac{j-k}{kj} \\
&\leq \frac{j+k}{jk} \\
&= \frac{1}{j} + \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Si tomamos $k.j > \dfrac{2}{\epsilon}$ se tiene

$$d_1(f_j, f_k) < \frac{1}{j} + \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

asi pues, (f_k) es de Cauchy

Ejemplo La sucesión de funciones $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_k = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & si \quad -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & si \quad \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

no converge en $C_1[-1, 1]$.

Demostración. Supongamos que $f_k \to f$ en $C_1[-1, 1]$. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Si $k \geq \dfrac{1}{\alpha}$, entonces $f_k(x) = 1$ para todo $x \in [\alpha, 1]$. En consecuencia

$$0 \leq \int_\alpha^1 |1 - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^1 |f_k(x) - f(x)|\, dx = d_1(f_k, f(x)) \to 0$$

Por tanto

$$\int_\alpha^1 |1 - f(x)|\, dx = 0$$

y esto implica que $f(x) = 1$ para todo $x \in [\alpha, 1]$. Análogamente, $f(x) = -1$ para todo $x \in [-1, -\alpha]$ y, como $\alpha \in (0, 1)$ es arbitraria, tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \in [-1, 0) \\ 1 & si \quad x \in (0, 1] \end{cases}$$

En consecuencia, f no es continua en $[-1, 1]$, lo cual contradice nuestra suposición. □

Espacios Completos

Definición 2. *Un espacio métrico X es* ***completo****, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.*

Ejemplo Los números reales con la métrica del valor absoluto es un espacio completo

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de números reales. Por ser de Cauchy, está acotada, lo que significa en la recta real que está acotada superior e inferiormwente. Sean, pues $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Pongamos, para cada n,

$$R_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

e

$$y_n = \sup\ R_n$$

Puesto que, para todo n, se tiene $R_{n+1} \subset R_n$, se verifica que $y_{n+1} \leq y_n$ y la sucesión (y_n) es decreciente. Además $a \leq y_n$ para todo n e (y_n) está acotada inferiormente. Luego (y_n) converge hacia

$$z = \text{ínf}\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nos proponemos demostrar que

$$\text{lím}\ x_n = z$$

Sea, pues, $\epsilon > 0$; existe, entonces, un número natural m_1 tal que

$$|x_p - x_q| < \frac{\epsilon}{2} \quad (p, q \geq m_1)$$

Además, puesto que lím $y_n = z$ debe existir algún número natural m_2 tal que

$$|y_k - z| < \frac{\epsilon}{2} \quad (k \geq m_2)$$

Si ponemos $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ se tiene, entonces

$$|x_p - x_q| < \frac{\epsilon}{2} \quad (p, q \geq m) \quad y \quad |y_k - z| < \frac{\epsilon}{2} \quad (k \geq m)$$

Consideremos ahora y_m. Teniendo en cuenta que $y_m = \sup\ R_m$, entonces $z - \frac{\epsilon}{2}$ no puede ser cota superior de R_m; debe pues existir algún $x_t \in R_m$ tal que

$$x_t \in \left(z - \frac{\epsilon}{2}, y_m\right] \subset \left(z - \frac{\epsilon}{2}, z + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

lo que significa que $|x_t - z| < \frac{\epsilon}{2}$.
Ahora bien, como $x_t \in R_m$ resulta que $t \geq m$ y se tiene que para toda $n \geq m$,

$$|x_n - z| \leq |x_n - x_t| + |x_t - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□