Espacios Completos

Definición 1. *Un espacio métrico X es* ***completo***, *si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.*

Ejemplo El espacio de sucesiones acotadas ℓ_∞ es completo.

Demostración. Sea $x^1, x^2, ...$ una sucesión de Cauchy en el espacio ℓ_∞. (Observese que cada elemento x^n) de esta sucesión es un elemento de ℓ_∞, entonces cada x^n es una sucesión, es decir

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1^1, x_2^1, ...) \\ x^2 &= (x_1^2, x_2^2, ...) \\ &\vdots \\ x^n &= (x_1^n, x_2^n, ...) \end{aligned}$$

queremos encontrar un elemento $x \in \ell_\infty$ tal que x^n converge a x.
Sea $\epsilon > 0$. Como x^n es una sucesión de Cauchy, existe $N > 0$ tal que

$$d_\infty(x^n, x^m) < \epsilon$$

$\forall\ n, m > N$. Por lo que

$$\sup |x_k^n - x_k^m| < \epsilon$$

$\forall\ n, m > N$. En particular se tiene

$$|x_k^n - x_k^m| < \epsilon$$

$\forall\ k, n, m > N$
Esto significa que para cada k, la sucesión

$$x_k^1, x_k^2, ...$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Al ser $\mathbb{R}$ completo, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k$$

Denotamos $x = (x_1, x_2, ...)$.
Nos gustaría mostrar que x^n converge a x.
Escogemos $\epsilon > 0$, donde según lo anterior, existre $N > 0$ tal que

$$|x_k^n - x_k^m| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall\ k, n, m > N$.
Tomando límite si $m \to \infty$, obtenemos

$$|x_k^n - x_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall\ k, n, m > N$.
Tomando el supremo en k, obtenemos

$$\sup |x_k^n - x_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall\ n > N$. En otras palabras

$$d_\infty(x^n, x) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$\forall\ n > N$. Esto implica que x^n converge a x. $\square$

Definición 2. *Una función $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo si ϕ es continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es continua*

Ejemplo la función $\phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \tan(x)$ es tal que ϕ es un homeomorfismo.

Por otro lado $\mathbb{R}$ es completo pero $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ no es completo.

Por tanto la completitud no se preserva bajo homeomorfismos

Definición 3. *Una función $\phi : X \to Y$ es Lipschitz continua, si existe $c > 0$ tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq\ c\ d_X(x; y) \quad \forall\ x, y \in X$$

A c se le llama una constante de Lipschitz para ϕ.

Definición 4. *Diremos que ϕ es una equivalencia si ϕ es Lipschitz continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es Lipschitz continua.*

Proposición 1. *Si existe una equivalencia $\phi : X \to Y$ entre dos espacios métricos X, Y entonces X es completo si y sólo si Y lo es*

Demostración. Supongamos que Y es completo y que $\phi : X \to Y$ es Lipchitz continua. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_Y(\phi(x_j), \phi(x_k)) \leq\ c\ d_X(x_j, x_k) < \epsilon \quad \forall\ j, k \geq k_0$$

Es decir, la sucesión $(\phi(x_k))$ es de Cauchy en Y y como Y es completo, se tiene que

$$\phi(x_k) \to y$$

en Y. Ahora bien, como ϕ^{-1} es continua, se tiene que

$$x_k = \phi^{-1}(\phi(x_k)) \to \phi^{-1}(y)$$

en X. Esto prueba que X es completo.
Recíprocamente supongamos que X es completo y que $\phi^{-1} : Y \to X$ es Lipchitz continua.
Sea (y_k) una sucesión de Cauchy en Y. Entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(\phi^{-1}(y_j), \phi^{-1}(y_k)) \leq\ c\ d_Y(y_j, y_k) < \epsilon \ \ \forall\ j.k \geq k_0$$

es decir la sucesión $(\phi^{-1}(y_k))$ es de Cauchy en X, y como X es completo se tiene que

$$\phi^{-1}(y_k) \to x$$

en X. Ahora bien ϕ es continua entonces

$$y_k = \phi(\phi^{-1}(y_k)) \to \phi(x)$$

en Y. Esto prueba que Y es completo. $\square$

Proposición 2. *Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio métrico A de X es completo si y sólo si es cerrado en X.*

Demostración. $\Leftarrow$.
Supongamos que A es cerrado en X. Sea (a_k) una sucesión de Cauchy en A. Entonces (a_k) es una sucesión de Cauchy en X y, como X es completo, $a_k \to x$ en X. Esto quiere decir que $x \in \overline{A}$. Esto prueba que A es completo.
$\Rightarrow$.
Supongamos que A es completo. Sea $x \in A$. Existe una sucesión $(a_k) \in A$ tal que $a_k \to x$ en X. Esta sucesión es de Cauchy y como A es completo se tiene que $a_k \to a$ en A. Por unicidad $x = a \in A$. En consecuencia, A es cerrado □