Convergencia Puntual

Definición 1. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge puntualmente en S a una función $f : S \to X$ si*

$$f_k(z) \to f(z)$$

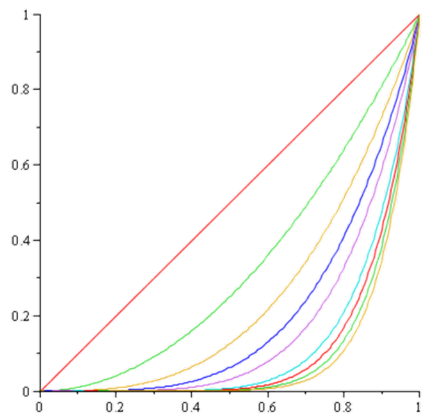
en X para cada $z \in S$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$ y cada $z \in S$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ y de z) tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \quad \forall\ k \geq k_0$$

*La función f se llama el **límite puntual** de (f_k)*

Ejemplo Sea $S = [0,1]$ y $f_k : S \to \mathbb{R}$, dada por $f_k(z) = z^k$. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z = 1 \end{cases}$$



Tenemos que para $z = 1$

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(1), f(1)) = |1^k - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$$

mientras que si $0 \leq z < 1$

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(z), f(z)) = |f_k(z) - f(z)| = |z^k| = 0 < \epsilon$$

si $k > \dfrac{\log\ \epsilon}{\log\ z}$ por lo tanto

$$f_k \to f$$

puntualmente en S.

Convergencia Uniforme

Definición 2. *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S a una función $f : S \to X$ si, para cada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ) tal que*

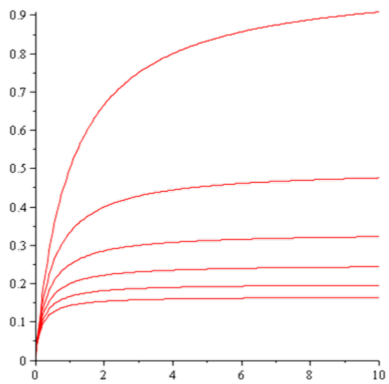
$$d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \quad \forall\ k \geq k_0$$

*La función f se llama el **límite uniforme** de (f_k)*

Ejemplo Sea $S = \{z \mid z > 0\}$ y para $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_k(z) = \frac{z}{1 + kz}$$

y $f(z) = 0$



Tenemos que para $z \in S$

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(z), f(z)) = \left|\frac{z}{1+kz}\right| < \frac{z}{kz} = \frac{1}{k} < \epsilon$$

si $k > \dfrac{1}{\epsilon}$ por lo tanto

$$(f_k) \to f$$

uniformemente en S.

Teorema 1. *Sean (Z, d_Z) y (X, d_X) espacios métricos. Si $f_k : Z \to X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ y (f_k) converge uniformemente a f en Z, entonces $f : Z \to X$ es continua.*

Demostración. sea $z_0 \in Z$ y $\epsilon > 0$. Como (f_k) converge uniformemente a f, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, z \in Z, \quad \forall\, k \geq k_0$$

Y, como f_{k_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) < \frac{\epsilon}{3} \quad si \quad d_Z(z, z_0) < \delta$$

En consecuencia

$$d_X(f(z), f(z_0)) \leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) + d_X(f_{k_0}(z_0), f(z_0)) < \epsilon$$

si $d_Z(z, z_0) < \delta$. Esto prueba que f es continua. □

Para funciones acotadas la convergencia uniforme es simplemente la convergencia en el espacio métrico $\mathcal{B}(S, X)$, cuya métrica es la métrica uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in S}\ d_X(f(z), g(z)), \quad f, g \in \mathcal{B}(S, X)$$

Proposición 1. *Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(S, X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$*

Demostración. $(\Leftarrow)$
Si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$ entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_\infty(f_k, f) = \sup\ d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \quad \forall\, k \geq k_0$$

En consecuencia

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \ \ \forall\, k \geq k_0, \ \ \forall\, z \in S$$

Es decir, (f_k) converge uniformemente a f en S.
$(\Rightarrow)$

Recíprocamente, si $f_k \in \mathcal{B}(S, X)$ y (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \;\; \forall\, k \geq k_0, \; \forall\, z \in S$$

Como f_{k_0} es acotada, existen $c > 0$ y $x_0 \in X$ tales que

$$d_X(f_{k_0}, x_0) < c \;\; \forall\, z \in S$$

En consecuencia

$$d_X(f(z), x_0) \leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}, x_0) < \epsilon + c \quad \forall\, z \in S$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{B}(S, X)$ y se sigue que

$$d_X(f_k, f) = \sup_{z \in S} d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \;\; \forall\, k \geq k_0$$

Es decir, (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$ □

Definición 3. *Sean Z y X espacios métricos. El espacio de funciones continuas y acotadas de Z a X es el espacio métrico*

$$C(Z, X) = \{f : Z \to X \mid f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la métrica inducida por la de $\mathcal{B}(S, X)$, es decir,

$$d_\infty(f, g) = \sup_{z \in Z} \; d_X(f(z), g(z))$$

si $f, g \in C(Z, X)$

Corolario 1. *Sean Z y X espacios métricos. Entonces $C(Z, X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(S, X)$.*

Demostración. Sea $f \in \overline{C(Z, X)}$. Según el siguiente resultado
Sea A un subconjunto de X y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión (x_k) tal que $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \to x$ en X
existe una sucesión (f_k) en $C(Z, X)$ tal que $f_k \to f$ en $\mathcal{B}(S, X)$.
Ahora bien según el resultado
Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(S, X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$
f_k converge uniformemente a f.
Y segun en resultado
Sean (Z, d_Z) y (X, d_X) espacios métricos. Si $f_k : Z \to X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ y (f_k) converge uniformemente a f en Z, entonces $f : Z \to X$ es continua.
Se tiene $f \in C(Z, X)$. Esto prueba que $C(Z, X)$ es cerrado en $\mathcal{B}(S, X)$ □