Convergencia uniforme y continuidad

Proposición 1. *Sea $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ y que converge uniformemente hacia f en $[a,b]$. Si cada f_k es continua en $[a,b]$, entonces la función límite f es continua en $[a,b]$.*

Demostración. Como $f_k \to f$ uniformemente en $[a,b]$ entonces $\forall\ \epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_0$ y se tiene

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\ x \in [a,b]$$

Ahora bien sea $\forall\ m \geq k_0$, entonces por ser f_m continua en $[a,b]$ se tendría que existe $\delta > 0$ tal que para $x_0 \in [a,b]$ y $\forall\ x \in [a,b]$

$$d_{[a,b]}(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_{\mathbb{R}}(f_m(x), f_m(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

Luego

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) \leq d_{\mathbb{R}}(f(x), f_m(x)) + d_{\mathbb{R}}(f_m(x), f_m(x_0)) + d_{\mathbb{R}}(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

si $d_{[a,b]}(x, x_0) < \delta$ □

Compatibilidad de la convergencia uniforme con la derivada y la integral

Teorema 1. *Si $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a,b]$ tales que (f_k) converge a f puntualmente en $[a,b]$ y f'_k converge a g uniformemente en $[a,b]$, entonces f es continuamente direrenciable en $[a,b]$ y $f' = g$*

Demostración. Sea $x_0 \in (a,b)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_j - f_k$ se tiene que, para cada $x \in (a,b)$, existe $\xi_x \in (a,b)$ tal que

$$f_j(x) - f_k(x) - (f_j(x_0) - f_k(x_0)) = (f'_j(\xi_x) - f_k(\xi_x))(x - x_0)$$

En consecuencia,

$$|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \|f'_j - f'_k\|_\infty |x - x_0| \quad \forall\ x \in (a,b)$$

como (f'_k) converge en $[a,b]$, dada $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}|x - x_0| \quad \forall\ x \in (a,b), \quad \forall\ j,k \geq k_0$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$, se concluye

$$|f(x) - f(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}|x - x_0| \quad \forall\ x \in (a,b), \quad \forall\ j,k \geq k_0$$

Por otra parte, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f'_k(x_0) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\ k \geq k_1$$

Sea $k_* = \max\{k_0, k_1\}$, y sea $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0} - f'_{k_*}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad si\ |x - x_0| < \delta$$

De las desigualdades anteriores se tiene

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| \leq$$

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0}\right| + \left|\frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0} - f'_{k_*(x_0)}\right| + |f'_{k_*}(x_0) - g(x_0)| < \epsilon \quad si\ |x - x_0| < \delta$$

Es decir, f es diferenciable en x_0 y $f'(x_0) = g(x_0)$.
Finalmente, como $f'_k \in C[a, b]$, se tiene que $g \in C[a, b]$, es decir, f es continuamente diferenciable en $[a, b]$ □

Lema 1. *Sea $X = [a, b]$ y $Y = \mathbb{R}$. Entonces para toda $f \in C(X, Y)$ se tiene que*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq (b - a)\|f\|_U$$

Demostración. Sea $f \in C(X, Y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)|\ dx \\ &\leq \int_a^b \|f\|_U\ dx \\ &= (b - a)\|f\|_U\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Sea $X = [a, b]$ y $Y = \mathbb{R}$. Supongamos que*

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f$$

en $C(X, Y)$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b f$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f$$

en $C(X, Y)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f\|_U < \frac{\epsilon}{b - a}$$

para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto según el lemma anterior

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx\right| &= \left|\int_a^b (f_k(x) - f(x))\ dx\right| \\ &\leq (b-a)\|f_k - f\|_U \\ &\leq (b-a)\frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon\end{aligned}$$

En consecuencia para $k \geq k_0$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b f.$$

□