

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

A continuación daremos un criterio que garantiza la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en términos de la sucesión misma. Sean S un conjunto y (X, d_X) un espacio métrico.

Definición 1. Una sucesión de funciones $f_k : S \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$ es uniformemente de Cauchy en S si, para cada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \epsilon \quad \forall j, k \geq k_0, \quad \forall z \in S$$

Teorema 1. (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy) Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S si y sólo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S :

Demostración. Si (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall z \in S$$

En consecuencia

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) \leq d_X(f_k(z), f(z)) + d_X(f(z), f_j(z)) < \epsilon \quad \forall j, k \geq k_0, \quad \forall z \in S$$

Es decir, (f_k) es uniformemente de Cauchy.

Supongamos ahora que (f_k) es uniformemente de Cauchy en S . Entonces, para cada $z \in S$; la sucesión $(f_k(z))$ es de Cauchy en X y, como X es completo, esta sucesión converge a un punto de X al que denotaremos por $f(z)$. Probaremos ahora que $f_k \rightarrow f$ uniformemente en S . Sea $\epsilon > 0$. Como (f_k) es uniformemente de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall j, k \geq k_0, \quad \forall z \in S$$

Y como para cada $z \in S$ se tiene que $f_j(z) \rightarrow f(z)$ en X , existe $k(z) \in \mathbb{N}$ (que depende de z) tal que

$$d_X(f_j(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall j \geq k(z)$$

Dadas $k \geq k_0$ y $z \in S$, tomemos $j = \max\{k_0, k(z)\}$. Entonces

$$d_X(f_k(z), f(z)) \leq d_X(f_k(z), f_j(z)) + d_X(f_j(z), f(z)) < \epsilon$$

En consecuencia

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \epsilon \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall z \in S$$

es decir (f_k) converge uniformemente a f □

Ejemplo Sea

$$f_k(x) = \frac{x}{kx+1} \quad \text{en } [0, \infty)$$

se tiene entonces

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(x), f_j(x)) = |f_k(x) - f_j(x)| = \frac{x}{kx+1} - \frac{x}{jx+1} = \frac{x^2(j-k)}{(kx+1)(jx+1)}$$

para $j > k$ tenemos

$$d_{\mathbb{R}}(f_k(x), f_j(x)) = \frac{x^2(j-k)}{(kx+1)(jx+1)} \leq \frac{x^2(j-k)}{k j x^2} = \frac{j-k}{k j} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{k}{j}\right) < \frac{1}{k}$$

Dado $\epsilon > 0$ si escogemos $N > \frac{1}{\epsilon}$, para todo $k \geq N$ y todo $j > k$ se tiene

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) = |f_k(x) - f_j(x)| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

Por lo tanto la sucesión (f_k) satisface la condición de Cauchy, o sea que la sucesión converge uniformemente

Teorema 2. Sean S un conjunto y Z un espacio métrico.

Si X es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{B}(S, X)$ y $C(Z, X)$ son completos.

Demostración. Para ver que $\mathcal{B}(S, X)$ es completo

Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S, X)$. Claramente (f_k) es uniformemente de Cauchy en S y, según los resultados

Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(SX)$: Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$

Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$; converge uniformemente en S si y sólo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S

(f_k) converge uniformemente en $\mathcal{B}(S, X)$. Esto prueba que $\mathcal{B}(S, X)$ es completo.

Para ver que $C(Z, X)$ es completo según el resultado

Sean Z y X espacios métricos. Entonces $C(Z, X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(S, X)$.

Se tiene que $C(Z, X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(S, X)$ y por el resultado Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio métrico A de X es completo si y sólo si es cerrado en X .

asegura entonces que $C(Z, X)$ es completo □