El teorema del punto fijo

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 1. *Una función $\phi : X \to X$ se llama una contracción si existe $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha \ d(x, y) \ \ \forall \ x, y \in X$$

Es decir, una contracción es una función de un espacio métrico en sí mismo que es Lipchitz continua con constante de Lipchitz estrictamente menor que 1.
Es importante observar que el que $\phi : X \to X$ sea o no contracción depende de la métrica que le demos a X.

Ejemplo Sea $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Definimos $S : X \to X$ dada por :

$$S(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

entonces

$$\begin{aligned} d(S(x), S(y)) &= \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ |x - y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ d(x, y) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \ d(x, y) \end{aligned}$$

Así, tomando $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene que S es una contracción

Definición 2. *Un punto $x' \in X$ se llama punto fijo de la función $\phi : X \to X$ si $\phi(x') = x'$*

Denotamos ϕ^k a la composición

$$\phi^k = \underbrace{\phi \circ \phi \cdots \phi}_{k-veces} \ \ si \ k \ \in \ \mathbb{N}, \quad \phi^0 = id_X$$

donde $id_X : X \to X$ es la función identidad.

Teorema 1. *Punto fijo de Banach.*
Sea X un espacio mátrico completo, no vacio, y sea $\phi : X \to X$ una contracción. Entonces se cumple lo siguiente:
(a) ϕ tiene un único punto fijo x'
(b) Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x_0 en X, y se cumple que

$$d(\phi^k(x_0), x') \leq \left(\frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \right) \ d(\phi(x_0), x_0)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ satisface

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha \ d(x, y) \ \ \forall \ x, y \in X$$

Demostración. Sea x_0 cualquiera de X y denotemos por

$$x_k = \phi^k(x_0)$$

Demostraremos primero que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X. Nota que si ϕ satisface

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha\ d(x, y) \ \ \forall\ x, y \in X$$

entonces

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) \leq \alpha\ d(x_1, x_0) \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Además, para cualesquiera $y, z \in X$, se cumple

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leq d(y, \phi(y)) + d(\phi(y), \phi(z)) + d(\phi(z), z) \\ &\leq d(y, \phi(y)) + \alpha\ d(y, z) + d(\phi(z), z) \end{aligned}$$

es decir,

$$(1 - \alpha)\ d(y, z) \leq d(y, \phi(y)) + d(\phi(z), z)$$

Tomando $y = x_k$ y $z = x_j$ obtenemos

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{d(x_{k+1}) + d(x_{j+1}, x_j)}{1 - \alpha} \leq \left(\frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha}\right)\ d(x_1, x_0)$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $\alpha \in (0, 1)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{\alpha^k}{1 - \alpha}\right)\ d(x_1, x_0) < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall\ k \geq k_0$$

En consecuencia

$$d(x_k, x_j) < \epsilon \ \ \forall\ j, k \geq k_0$$

Esto demuestra que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X.
Como X es completo, existe $x' \in X$ tal que $x_k \to x'$ en X y, como ϕ es continua, se tiene entonces que $x_{k+1} = \phi(x_k) \to \phi(x')$ en X. Como el límite de una sucesión es único, concluimos que $\phi(x') = x'$, es decir, x' es un punto fijo de ϕ.
Veamos que es único. Si x_1' y x_2' son puntos fijos de ϕ entonces

$$d(x_1', x_2') = d(\phi(x_1'), \phi(x_2')) \leq\ \alpha\ d(x_1', x_2')$$

Como $\alpha < 1$, esta desigualdad implica que $d(x_1', x_2') = 0$, es decir, $x_1' = x_2'$.
(b) Por último, haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad obtenemos que

$$d(x_k, x') = \lim_{j \to \infty} d(x_k, x_j) \leq \left(\frac{\alpha^k}{1 - \alpha}\right)\ d(x_1, x_0) \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}$$

□

Ejemplo Consideremos la función $f : [1, 2] \to [1, 2]$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

1. Vamos a comprobar que f es una contracción, con la métrica usual en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= \left|\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x - y + \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{y}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x - y + \left(\frac{2y - 2x}{xy}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x - y - \frac{2}{xy}(x - y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x - y)\left(1 - \frac{2}{xy}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|1 - \frac{2}{xy}\right| |x - y| \\
&\leq \frac{1}{2}|x - y| \\
&= \frac{1}{2}\, d(x, y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto considerando $\alpha = \dfrac{1}{2}$ para la función f se cumple que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \quad \forall\, x, y \in [1, 2]$$

por lo tanto f es una contracción

2. Ahora vamos a construir una sucesión convergente con la función, en este caso

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= f(2) \\
x_2 &= f(x_1) \\
x_3 &= f(x_2) \\
\vdots &= \vdots \\
x_{n+1} = f(x_n) &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)
\end{aligned}$$

Para comprobar que es convergente, primero vamos a ver con un argumento inductivo, que la sucesión está acotada
(a) Para $n = 0$ se tiene $1 \leq 2 \leq 2$

(b) Suponemos la validez para n, es decir $1 \leq x_n \leq 2$
(3) Vamos a comprobar que se cumple para $n+1$, en este caso

$$\begin{aligned}
1 \leq x_n \leq 2 \Rightarrow\ & 1 \leq x_n \leq 2 \\
\Rightarrow\ & 1 \leq \frac{2}{x_n} \leq 2 \\
\Rightarrow\ & 1 + x_n \leq x_n + \frac{2}{x_n} \leq x_n + 2 \\
\Rightarrow\ & 2 \leq (1 + x_n) \leq x_n + \frac{2}{x_n} \leq (x_n + 2) \leq 4 \\
\Rightarrow\ & 2 \leq x_n + \frac{2}{x_n} \leq 4 \\
\Rightarrow\ & 1 \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \leq 2 \\
\Rightarrow\ & 1 \leq x_{n+1} \leq 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión esta acotada superior e inferiormente

3. Vamos a comprobar que $x_n^2 \geq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, en este caso con un argumento inductivo se tiene
(a) para $n = 0$ se cumple $x_0^2 = 4 \geq 2$
(b) suponemos la validez para n, es decir $x_n^2 \geq 2$
(c) Para comprobar la validez para $n+1$ procedemos de la siguiente manera

$$x_n^2 \geq 2 \Rightarrow x_n \geq \frac{2}{x_n} \Rightarrow x_n - \frac{2}{x_n} \geq 0 \Rightarrow \left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2} \geq 0 \Rightarrow x_n^2 + \frac{4}{x_n^2} \geq 4$$

Se tiene entonces que

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{4}{x_n^2} + 4\right) \geq \frac{1}{4}(4+4) = 2$$

por lo tanto

$$x_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right]^2 \geq 2$$

Usando lo anterior se tiene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n}\ \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

es decir la sucesión (x_n) es decreciente y como está acotada entonces converge a un número s, se tiene entonces que

$$s = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{2}{s}\right)$$

esto quiere decir que

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{2}{s}\right) \Rightarrow 2s = s + \frac{2}{s} \Rightarrow s = \frac{2}{s} \Rightarrow s^2 = 2 \Rightarrow s = \sqrt{2}$$

Según el teorema del punto fijo, se tiene que la función $f : [1, 2] \to [1, 2]$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

tiene un punto fijo en $x = \sqrt{2}$, vamos a comprobarlo

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$