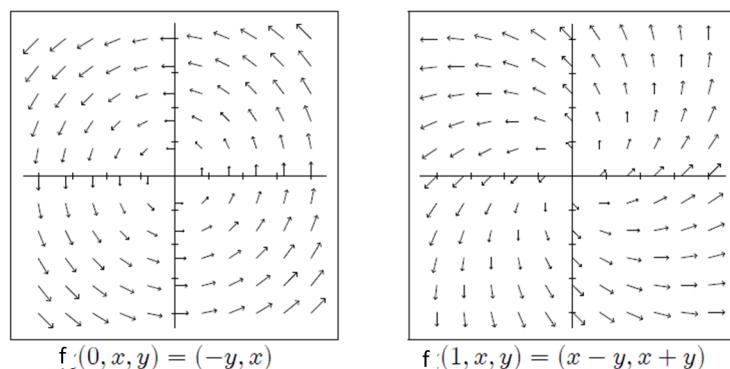


Aplicaciones del teorema del punto fijo

Ecuaciones Diferenciales Consideraremos campos vectoriales que cambian continuamente con el tiempo, es decir, funciones continuas $f : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. El intervalo abierto (a, b) puede ser infinito. Las siguientes figuras ilustran el campo vectorial $f(t, x, y) = (tx - y, x + ty)$ para $t = 0$ y $t = 1$



Dado un tiempo inicial $x_0 \in (a, b)$ y una posición inicial y_0 , nos preguntamos si existe una trayectoria $y(t)$ tal que $y(x_0) = y_0$ cuya velocidad $y'(t)$ en cada tiempo t sea precisamente $f(t, y(t))$

Definición 1. Una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

es una función continuamente diferenciable $y : J \rightarrow \Omega$. Definida en un subintervalo J de (a, b) que contiene a x_0 , que satisface

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in J \quad y(x_0) = y_0$$

El punto (x_0, y_0) se llama la condición inicial del problema.

La ecuación diferencial puede ser englobada en la función $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \Omega$, si y es continua y satisface

$$y(t) = \int_{x_0}^t f(s, y(s)) \, ds + y_0 \quad \forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Definición 2. Una función $f : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipchitz continua en la segunda variable si, para cada $x_0 \in (a, b)$ y $y_0 \in \Omega$, existen $\delta_0 > 0$ y $c > 0$ tal que $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subset (a, b)$ y $[y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0] \subset \Omega$ y

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq c \|x_1 - x_2\| \quad \text{si } |x - x_0| \leq \delta_0 \quad y \quad x_1, x_2 \in \Omega$$

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales con valor inicial Sea

$S = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$. La función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y existe una constante A tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in S$$

Sea $|f(x, y)| \leq B$ en S y sea $\alpha \in [0, a]$ tal que

$$\alpha < \min \left\{ \frac{1}{A}, \frac{b}{B} \right\}$$

Entonces la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$

Solución La ecuación diferencial puede ser englobada en una única condición para todo $t \in I$ se debe tener

$$y(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

Sea $M = [x_0 - a, x_0 + a]$ y $N = [y_0 - b, y_0 + b]$. Definimos la función $F : C(M, N) \rightarrow C(M, N)$ como

$$F(\psi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) \, dt$$

1. Vamos a verificar que $F(\psi)(x) \in N$, en este caso para toda $\psi \in C(M, N)$ se tiene

$$\begin{aligned} |F(\psi)(x) - y_0| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) \, dt - y_0 \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) \, dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \psi(t))| \, dt \\ &\leq \int_{x_0}^x B \, dt \\ &\leq |x - x_0| B \\ &< \alpha B \\ &< \frac{b}{B} B = b \end{aligned}$$

por lo tanto $|F(\psi)(x) - y_0| < b$ y entonces $y_0 - b < F(\psi)(x) < y_0 + b$

2. Por otro lado

$$\begin{aligned}
 |F(\psi)(x) - F(\psi)(y)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) \, dt - y_0 + \int_{x_0}^y f(t, \psi(t)) \, dt \right| \\
 &= \left| \int_y^x f(t, \psi(t)) \, dt \right| \\
 &\leq \int_y^x |f(t, \psi(t))| \, dt \\
 &\leq B|x - y|
 \end{aligned}$$

de modo que $F(\psi)$ es Lipchitz

Si tomamos $k = A\alpha$ vemos que $0 < k < 1$ y para $\psi, \phi \in C(M, N)$

$$\begin{aligned}
 |F(\psi)(x) - F(\phi)(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) \, dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) \, dt \right| \\
 &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))] \, dt \right| \\
 &\leq A |\psi(t) - \phi(t)| |x - x_0| \\
 &\leq A \alpha |\psi(t) - \phi(t)| \\
 &= k |\psi(t) - \phi(t)| \\
 &\leq k \max |\psi(t) - \phi(t)|
 \end{aligned}$$

Luego F es una contracción del espacio completo $C(M, N)$ en si mismo. Existe por tanto una función $\varphi \in C(M, N)$ tal que $F(\varphi) = \varphi$ o sea

$$y(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(s, y(s)) \, ds$$

lo que equivale a existir una única solución para la ecuación diferencial.

Ejemplo Considere el problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sea $S = [-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R}^2$.

En este caso $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por

$$f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + 1}$$

La cual es continua para todo x, y en S
en este caso

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{y^2 + 1} \right| \leq |x| < \epsilon$$

tomando $\alpha \in [0, \epsilon]$ tal que $\alpha < \min \left\{ \frac{1}{\epsilon}, 1 \right\}$ por otro lado

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{ty_1}{y_1^2 + 1} - \frac{ty_2}{y_2^2 + 1} \right| = t \left| \frac{y_1}{y_1^2 + 1} - \frac{y_2}{y_2^2 + 1} \right| \leq t|y_1 - y_2| < \epsilon|y_1 - y_2|$$

existe entonces una solución de la ecuación diferencial en un intervalo alrededor del cero